Une petite histoire !

50 000 ans avant J.-C., l'homme, par nécessité de compter diverses choses (animaux, hommes, objets...), utilisait tout ce qui lui tombait sous la main pour y arriver. Il utilisait des cailloux, du latin *calculi* (comme calcul !!!) pour symboliser les nombres. Puis il lui vint l'idée de faire des marques sur un support.

C'est ainsi que **30 000 ans avant J.-C.**, on rencontre les premiers os entaillés de la préhistoire. Mais l'ancêtre de l'homme possédait deux grands atouts : ses mains... Comme toi petit, il calculait avec ses doigts et comme toi, il en avait 10 : d'où la création du système décimal. Puis les Mayas, les Aztèques, les Celtes et les Basques, se rendirent compte qu'en se penchant un peu, ils pouvaient aussi compter sur leurs orteils et ils adoptèrent la base vingt. Enfin les Sumériens, eux, comptèrent, en base soixante.

Où retrouve-t-on la base 60 ?

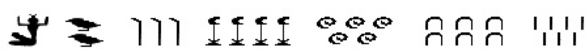
Dans les unités de temps : 1 heure c'est 60 minutes et 1 minute c'est 60 secondes.
On parle alors de **système sexagésimal**.

Mais comment faire avec les très grands nombres ?

On a ainsi retrouvé dans le Golfe persique certains symboles : un bâtonnet pour l'unité, une bille plate pour les dizaines, une petite boule pour les centaines, etc.
Les Sumériens utilisaient le système sexagésimal et modifièrent l'apparence des objets : un petit cône pour 1, une bille pour 10, un grand cône pour 60, un grand cône perforé pour 600, une sphère pour 3600, etc...
Ainsi naquirent les symboles pour représenter les nombres.

Vers 3 000 avant J.-C., apparurent les numérations égyptiennes. Comme pour l'écriture, les Egyptiens utilisaient les hiéroglyphes. Chaque signe possédait une valeur :

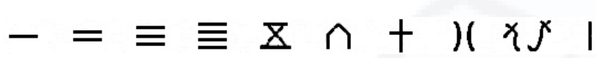
Les chiffres se lisaient verticalement et horizontalement ainsi :



= 1 2 ... ...

On a retrouvé les plus anciennes traces des **chiffres chinois** datant de la fin du XIVe siècle avant J.-C. Mais ce n'est qu'au IIe siècle av. J.-C. qu'apparut la numération décimale chinoise. La Chine a adopté le système de numération que nous connaissons mais en conservant ses symboles pour chaque chiffre.
En 1000 avant J.-C., les Chinois utilisaient déjà un système à base 10 composé de symboles :

- ces symboles furent retrouvés sur des os et des écailles de tortue.



- puis ils adoptèrent la notation avec des traits, comme leurs baguettes pour manger ...

Unités  Dizaines 

Ce système était astucieux puisque les unités, les centaines étaient à la verticale, les dizaines, les milliers, à l'horizontale et ils laissaient un espace pour le zéro.
Aujourd'hui, le zéro s'écrit avec un simple cercle et les symboles sont représentés ainsi :

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	et 10

Il existe un véritable problème : nous connaissons les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mais pas encore le zéro. Vers 400 avant J.-C., on laissait un espace pour indiquer que la place était libre. On pouvait désormais distinguer 12 et 102. Mais comment faire pour distinguer 12 et 120 ???

Bon, reprenons le cours de l'histoire...

Au IV^{e} siècle, apparaît la **numération décimale indienne**. Il y a bien sûr les neuf premiers chiffres et ... le chiffre zéro représenté par un point. Le chiffre zéro est donc d'origine indienne.

Puis les **chiffres arabes**, qui sont à l'origine des chiffres utilisés aujourd'hui, apparaissent vers 900. Les civilisations musulmane et indienne ont d'ailleurs un système de numérotation très proche.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 provient des chiffres ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

Et on retrouve le point de zéro indien !!!

En parlant de zéro et de chiffre : le mot *sunya* d'origine indienne signifiait vide ; en arabe il devint *sifr* pour ensuite donner le mot français chiffre. En italien *sifr* fut traduit par *zéfiro* qui aboutit à notre bon vieux **zéro**.

Et les chiffres romains ???

Les Romains employèrent également des symboles pour représenter leurs nombres.
Mais ce système était bien compliqué.
Le chiffre 4 n'était pas représenté par IIII mais par IV (= 5 -1).
De plus, il était bien difficile d'écrire ou de lire rapidement les grand nombres :
MCMXCIX pour 1999 !!!
Ce système n'était pas, non plus, adapté aux calculs :
XVXI + CXXVIII = ?
alors que 46 + 78 = ...
Et dire qu'on écrit encore les siècles en chiffres romains !!!

Continuons

Vers 960, un moine Auvergnat, Gerbert d'Aurillac (qui deviendra d'ailleurs pape en 999 sous le nom de Sylvestre II) s'initie aux chiffres arabes et les introduit en Europe occidentale. Vers 1500, avec l'ascension de l'imprimerie, les chiffres ont été légèrement déformés pour donner ceux d'aujourd'hui. Cependant, il faudra attendre 1594 pour voir apparaître la notation à virgule que nous utilisons encore pour représenter les nombres décimaux grâce au Néerlandais Willebord Snellius.

Les nombres à connaître

Le rayon de la terre : 6 380 km.
La distance terre-lune : 380 000 km.
La distance terre-soleil : 150 000 000 km.

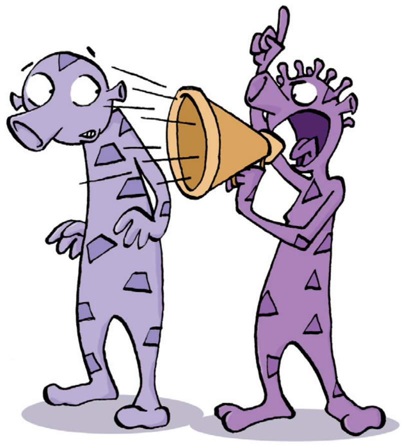
Le **nombre pi noté π**.
Voici ses 100 premières décimales : **3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 0679** ...
On connaît aujourd'hui plus d'un milliard de décimales. On dit que π est environ égal à 3,14 si on prend l'arrondi au centième.
Pour se souvenir des dix premières décimales, on peut apprendre cette phrase, puis compter le nombre de lettres par mot :
que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages !!!
Nous reviendrons sur le nombre π dans les chapitres 12 et 18.

En parlant du nombre **cent**, on le retrouve très souvent :
Centimètre : tiens, on retrouve le C de Cent en chiffres romains.
100 % quand on est très fort !
100 ans c'est aussi un siècle.
100 °c, c'est la température à partir de laquelle l'eau est en ébullition.

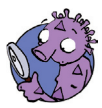
Plus compliqué : calcule la somme des 20 premières décimales du nombre π.

chapitre 1

Lire et écrire les nombres



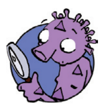
Les nombres décimaux



Il existe dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Un mot s'écrit avec des ...., un nombre s'écrit avec des............................

a. Ecriture de position



Tout nombre décimal peut s'écrire en deux parties séparées par une virgule : la partie entière et la partie décimale.
Selon la position, un chiffre indique :
- les unités, les dizaines, les centaines, les mille dans la partie entière.
- les dixièmes, les centièmes, les millièmes dans la partie décimale.

Exemple

partie entière				partie décimale		

538 , 472

partie.................................. partie..................................

538,472 = ... + ... + ... + ... + ... + ...

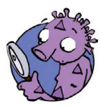
5 .... , 3 .... , 8 .... , 4 .... , 7 .... , 2

1 Dans le nombre 1,47 le chiffre 4 est le chiffre des ....

Dans le nombre 80,537 le chiffre des centièmes est .... et le chiffre des unités est ....

Dans le nombre 1,408 le chiffre 8 est le chiffre des .... et 4 est le chiffre des ....

b. Les zéros utiles et inutiles



On peut écrire ou supprimer des zéros à gauche de la partie entière ou à droite de la partie décimale.
Cela ne change pas sa valeur. Ainsi 18,3 = 018,3 = 18,30 = 018,30.
Un nombre entier est aussi un nombre décimal car 37 = 37,0.

2 En otant les zéros inutiles si cela est possible, complète les égalités suivantes.

013 = ... 140 = ... 3,04 = ...

24,00 = ... 5304,2300 = ... 2007 = ... 027,304 = ...

3 Complète par = ou ≠

5,300 .... 5,3 609 .... 69 12 .... 12,0 025 25

0,82 .... 82 82,9 .... 82,90 920,3 92,3

Les écritures d'un nombre

a. Ecriture avec des lettres

Million et milliard sont des noms, ils prennent un s au pluriel.
Vingt et cent prennent un s au pluriel s'ils ne sont pas suivis d'un autre nombre.
Mille est invariable, il ne prend jamais de s au pluriel.

4 Ecris en lettres les nombres suivants.

600 ....

540 ....

287 ....

80...

7,03 ....

1,407 ....

2 005 076 ....

80 003 000 ....

b. Ecriture avec des fractions décimales

Un nombre décimal a plusieurs écritures.

C'est l'écriture fractionnaire de 237,45

237,45 = ... + $\frac{......}{......}$ + $\frac{......}{......}$ = $\frac{..........}{..........}$

A quoi ça sert ?
On travaille ainsi les nombres entiers.

5 Fais la même chose avec les nombres suivants.

1,378 = ...

0,014 = ...

6 Donne l'écriture décimale ou/et l'écriture fractionnaire des nombres suivants :

1,016 = ...

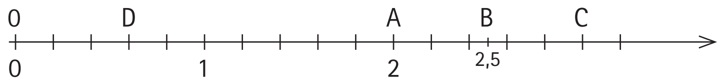
$\frac{562}{10}$ = ...

$\frac{21}{1000}$ = ...

$3 + \frac{56}{100}$ = ... = $\frac{....................}{....................}$

La droite graduée

Pour graduer une droite, on choisit : un **sens**, une **origine O** et une **unité de longueur**.

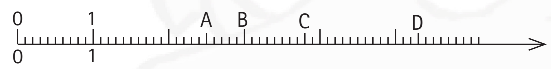


On repère chaque point d'une droite graduée par un nombre appelé l'abscisse.
On dit que 2 est l'abscisse du point A ou que le point A a pour abscisse 2. On note A (2).

7 L'**abscisse** de B est .... L'................................. de C est .... L'................................. de D est ....

Sur cette droite graduée, place les points N (1,5) , J (1,8) et P (0,85).

8 L'**abscisse** de A est ....



L'................................. de B est ....

L'................................. de C est ....

L'................................. de D est ....

L'ordre des nombres décimaux

a. Comparaison des nombres décimaux

Comparer deux nombres décimaux, c'est dire lequel est le plus grand, le plus petit ou s'ils sont égaux.
> signifie "est supérieur à" (est plus grand que)
< signifie "est inférieur à" (est plus petit que)

- **Cas 1 : les parties entières sont différentes.**
  On compare les parties entières. 57,235 .... 71,12 57,235 est .... à 71,12
- **Cas 2 : les parties entières sont égales.**
  1ère méthode : on compare les décimales de même rang. 7,29 7,263
  2e méthode : on essaye d'obtenir le même nombre de décimales. 7,290 7,263

ARGH

Le nombre qui a le plus de chiffres n'est pas toujours le plus grand 5,9 > 5,899

9 Compare 8,5 ...... 13,2 27,4 ...... 3,4 8,5 ...... 8,2 3,41 3,7

Classer des nombres par ordre croissant, c'est les ranger ....

Classer des nombres par ordre décroissant, c'est les ranger ....

10 Range dans l'ordre croissant les nombres décimaux suivants : 8,5 - 13,21 - 27,4 - 3,4 – 13,205 – 3,402

chapitre 1

Lire et écrire les nombres

Exercices

1 Complète les phrases ci-dessous.

Dans le nombre 43,958 le chiffre des dixièmes est ....

Dans le nombre 3256,39 le chiffre 2 est le chiffre des..

Dans le nombre 208,421 le chiffre des dizaines est ....

Dans le nombre 254,167 le chiffre 6 est le chiffre des..

2 Ecris en toutes lettres les nombres suivants.

80 002 015..

2 000 500 284,7..

2380,51 ....

500,098..

3 Ecris en chiffres les nombres suivants.

Dix mille cent trois unités ....

Cinq cent sept unités douze millièmes..

Quatre cent trois centièmes ....

4 Ecris chaque nombre en supprimant les zéros inutiles. Trace une croix si cela est impossible.

0025 = ... 38,01 = ... 15,08 = ... 39,0 = ...

204,230 = ... 02007 = ... 27,3040 = ...

5 Ecris les décimaux suivants sous forme fractionnaire.

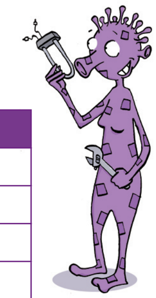
0,15 = ... 7,82 = ... 15,076 = ...

6 Donne l'écriture décimale des nombres suivants.

$\frac{3875}{100}$ = ... $\frac{169}{1000}$ = ... $\frac{208}{10}$ = ...

$23 + \frac{48}{1000}$ = ... $6 + \frac{8}{10} + \frac{5}{1000}$ = ...

12 Mathélaime a besoin de faire des chèques pour faire des courses.



Apprends comme elle à écrire les nombres sans fautes...

Nombres								Ecriture
58,06			*5*	*8*	*0*	*6*		*cinquante huit unités et six centièmes*
2084								
								trois milles douze unités
7280								
	x	x	x	x	x	x	x	cinq cents deux milles unité
201,7								
	x	x	x	x	x	x	x	trente deux milles neuf cents seize
300,084								
								neuf milles trois cent deus unités et huit millième
0,07								
								quatre-vingt unité et six centièmes
94,01								
								deux cents quatre-vingt dix neuf dixième
240,048								
								cent quatre-vingts deux centièmes

13 Pour savoir écrire un chèque.

Attention aux fautes d'orthographe.

Banque des banques

€

Payez contre ce chèque *Onse euro cinquante deux centime*

non endossable sauf au profit d'une banque ou d'un établissement assimilé

Banque des banques

€ *80,85*

Payez contre ce chèque

non endossable sauf au profit d'une banque ou d'un établissement assimilé

chapitre 6

Les angles

Touchatou est passionné par l'apiculture. Il t'explique comment vivent les abeilles.
Dans une ruche, il y a en moyenne :

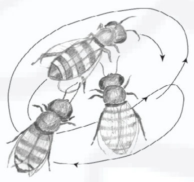
- 1 000 à 2000 mâles ou faux-bourdons,
- 40 000 à 60 000 femelles stériles appelées ouvrières qui vivent approximativement 45 jours,
- une unique reine qui est la seule femelle à pondre les œufs (environ 2 000 par jour) et qui vit entre 3 et 5 ans. On la remarque dans la ruche puisqu'elle est la plus grande : elle mesure 20 mm.

Les abeilles vont butiner les fleurs afin de prendre le nectar avec leur trompe et le pollen avec leurs pattes. Arrivées à la ruche, elles déposent dans une alvéole le nectar pour fabriquer le miel (par évaporation de l'eau) et le pollen pour se nourrir. S'il fait très beau et s'il y a beaucoup de fleurs, les abeilles peuvent produire 1 kg de miel en 2 heures.

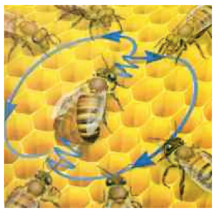
Une petite question ?

Tu es cinéma avec tes copains. Pendant la pub, tu veux leur indiquer l'emplacement d'une pâtisserie à quelques centaines de mètres qui propose de délicieux gâteaux. Mais tu ne peux pas parler, tu es dans un endroit sombre et tu dois leur indiquer qu'il n'y a pas de petites pâtisseries mais de gros gâteaux et au chocolat en plus !!!
Te voilà abeille...
Tu es bien embêté(e) mais l'abeille, elle, sait faire tout cela dans les mêmes conditions : elle ne parle pas, elle est dans l'obscurité et elle vient de découvrir un énorme champ de fleurs jaunes (ses préférées) à quelques centaines de mètres.
Faut-il préciser qu'à leur échelle, quelques centaines de mètres représentent des dizaines de km ?
En 1973, le biologiste autrichien Karl von Frisch reçut le prix Nobel de médecine pour avoir réussi à décoder ce prodigieux langage. Lorsqu'une butineuse revient à la ruche après une exploration, et qu'elle a découvert une source de nourriture, elle exécute dans l'obscurité de la ruche une sorte de danse : la danse des abeilles. Les autres abeilles perçoivent son agitation (grâce aux vibrations) et à l'odeur du nectar apporté : elles viennent s'agglutiner autour d'elle pour décoder les informations contenues dans ces mouvements.

Il y a deux grands types de danses



La danse en rond : elle décrit un cercle, se retrouve à son point de départ, fait demi-tour et reprend le même mouvement en sens inverse. Cette danse signale l'existence de sources situées à moins de 25 m, sans indication de distance ou de direction.



Lorsque la découverte est plus éloignée (au moins 100 m), l'éclaireuse exécute une danse plus compliquée : **la danse frétillante ou en huit**. Elle indique l'abondance, la distance et la direction de la trouvaille. L'abeille effectue d'abord un court trajet rectiligne de moins de cinq rangs d'alvéoles ; elle décrit ensuite un demi-cercle qui la ramène à son point de départ, refait le trajet rectiligne, décrit un nouveau demi-cercle symétrique au premier.

L'éclaireuse recommence ainsi ce parcours complet pendant quelques minutes. À chaque trajet rectiligne, la danseuse se met à ¨frétiller¨ de l'abdomen, tout en émettant un bourdonnement rythmé. Elle frétille d'autant plus vivement que la source signalée est abondante.

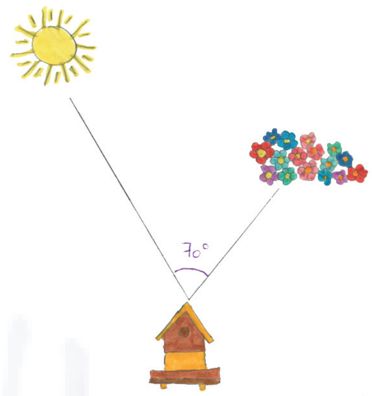
Mais comment l'abeille transmet-elle l'information permettant de diriger les autres ouvrières ?

Il s'agit ici de déterminer le type de nourriture, sa distance et sa direction par rapport à la ruche.

La source de nourriture

Elle est indiquée par l'odeur de l'abeille qui s'est frottée à la fleur. Les abeilles analysent alors les traces chimiques imperceptibles pour l'homme.

La direction



Avant d'entrer dans la ruche, l'abeille regarde dans la direction du soleil et dans la direction où se trouve la nourriture.

Elle trouvera ainsi l'**angle** que forment l'axe du soleil et l'axe où est située la nourriture.

Ici, l'angle mesure : ....

Dans la ruche l'axe de la danse frétillante (vertical au départ) pivotera du même angle pour indiquer la direction de la source de pollen ou de nectar par rapport au soleil. La précision de l'angle dessiné par la danseuse est remarquable, l'erreur n'excède pas 3°.

La distance ?

C'est assez compliqué : mathématiquement parlant !

En résumé, plus la vitesse d'exécution de la danse et les frétillements sont élevés plus la source est proche. L'abeille exécute en moyenne 40 tours par minute si la distance à indiquer est de 100 mètres, 24 tours s'il s'agit de 500 mètres. Pour les grandes distances (jusqu'à 11 km), la danse devient très lente et les oscillations de l'abdomen sont d'autant plus prolongées et appuyées.

Et si le soleil est derrière un nuage ou une montagne ?

Les ouvrières sont capables de détecter sa position grâce aux ultraviolets réfléchis par les fleurs. Leur œil est également constitué de facettes qui permettent d'analyser la lumière.

Mais le soleil tourne !

Ce n'est pas un problème : elles arrivent à prendre en compte ce phénomène. C'est une faculté de leur cerveau que de pouvoir utiliser le soleil comme boussole.

chapitre 14

Le théorème de Pythagore

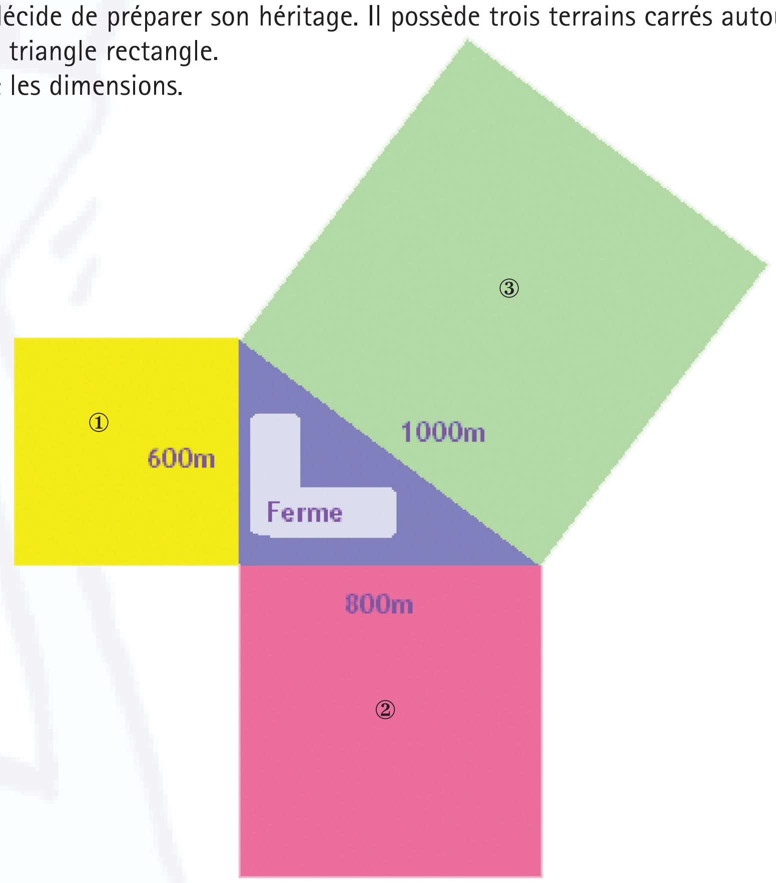
Activité

Avec Kastêt, passons aux constructions géométriques.
Prépare ta règle et ton équerre pour construire des carrés...

Une histoire agricole...

1ère partie

Robert, bientôt à la retraite, décide de préparer son héritage. Il possède trois terrains carrés autour de sa ferme située sur un terrain qui a la forme d'un triangle rectangle.
Voici le plan de sa ferme avec les dimensions.



Mais, il a un gros problème, un problème de mathématiques d'ailleurs. En effet, il doit léguer ses trois terrains de manière équitable mais il n'a que deux fils !!!
Robert, amateur de calculs, décide de léguer les terrains ① et ② à son fils David et le terrain ③ à son fils Pierre. Mais Pierre n'est pas du tout d'accord car il pense avoir moins de terres que son frère.
Reproduis le triangle à l'échelle 1/20 000e puis calcule l'aire des trois carrés.
Pierre a-t-il raison d'être en colère ?

Quelle est la nature du triangle dessiné ? ....

2^e partie

Marcel, un bon copain de Robert, décide lui aussi de préparer son héritage. Il possède une ferme et trois terrains carrés disposés de la même façon. Seules les dimensions changent : le terrain ① mesure 600 m de côté, le terrain ② 700 m de côté et le terrain ③ 800 m de côté.
Il décide alors de léguer les terrains ① et ② à son fils Marc et le terrain ③ à son fils Maxime.
Comme Pierre, Maxime n'est pas du tout d'accord car il pense avoir moins de terres que son frère.
Reproduis le triangle à l'échelle 1/20 000^e puis calcule l'aire des trois carrés.
Maxime a-t-il raison d'être en colère ?

Quelle est la nature du triangle dessiné ? ....

3^e partie

Nous voici aux États-Unis. La famille Ewing décide de léguer ses trois immenses terrains à JR et Bobby.
La ferme et trois terrains carrés sont disposés de la même façon. Seules les dimensions changent : le terrain ① mesure 3 000 m de côté, le terrain ② 4 000 m de côté et le terrain ③ 5 000 m de côté.
Bobby hérite des terrains ① et ② et JR du terrain ③. JR, célèbre pour son caractère irascible, fait un scandale : il est certain d'avoir obtenu moins de terres que son frère.
Reproduis le triangle à l'échelle 1/100 000^e puis calcule l'aire des trois carrés.
JR a-t-il raison de se mettre dans un état pareil ?

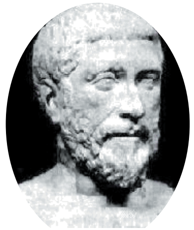
Quelle est la nature du triangle dessiné ? ....

Tu viens de découvrir que :

si on a un triangle ABC rectangle en A alors on a $AB^2 + AC^2 =$ ....

Cette égalité porte le nom du théorème de Pythagore.

Cet illustre savant serait un personnage mythique : il serait le fils d'Apollon. Il créa son école à Crotone, laquelle devint rapidement une secte aux règles de vie très sévères. Devenant alors dérangeant, persona non grata, il mourrut assassiné.



Pour Pythagore, la terre était sphérique et tournait sur elle-même autour du soleil. Cette théorie fut hélas invalidée par Eudoxe, Aristote et Ptolémée et plongea le monde dans l'erreur pendant 2 000 ans jusqu'à... l'entrée en scène de Galilée et de Copernic.

Le **théorème de Pythagore** affirme que dans un triangle ABC rectangle en A, le carré de l''**hypoténuse** est égal à la somme des carrés des deux autres côtés :

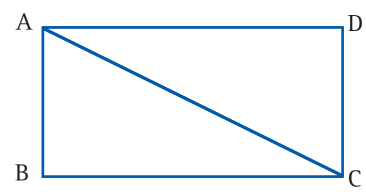
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Le **théorème** est en fait antérieur au célèbre philosophe puisqu'on le retrouve dans une tablette babylonienne datée de 2000 avant J.-C.

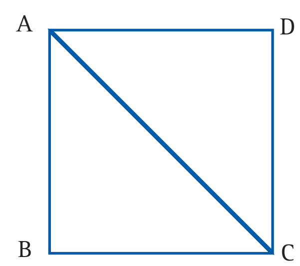
Sa philosophie, transmise par ses disciples appelés les Pythagoriciens repose sur le fait que toute chose peut être expliquée par les nombres entiers.

Avec Kastêt, passons aux constructions géométriques.
Prépare ta règle et ton équerre pour construire des carrés...

Exemple 1
Dans le rectangle ABCD de côté 3 et 4, calcule la longueur de la diagonale.
ABC est rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 4^2 + 3^2$
$AC^2 = 16 + 9$
$AC^2 = 25$
donc AC = 5.



Mais il y a un problème !



Exemple 2 :
Dans le carré ABCD de côté 1, calcule la longueur de la diagonale.
ABC est rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 1^2 + 1^2$
$AC^2 = 1 + 1$
$AC^2 = 2$
donc AC = ???

Ainsi furent créés les **nombres irrationnels** : *ratio* signifiant *compte* en latin.
Ce sont donc des nombres que l'on ne peut pas compter. On les note à l'aide du signe $\sqrt{\ }$.

On notera pour l'exemple 1, $AC^2 = 25$ donc $AC = \sqrt{25}$, la racine carrée de 25.
$\sqrt{25}$ est le nombre dont le carré est 25 : $\sqrt{25} \times \sqrt{25} = (\sqrt{25})^2 = 25$.

On notera alors pour l'exemple 2, $AC^2 = 2$ donc $AC = \sqrt{2}$, la racine carrée de 2.
$\sqrt{2}$ est le nombre dont le carré est 2 : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Sur ta calculatrice $\sqrt{2}$ = ...
$(\sqrt{2})^2$ = ... x .... = ...