

La valeur et le risque

EXERCICE 02.01 ***Thème : Rentabilités quotidiennes, rentabilité moyenne, variance et écart-type à partir d'un échantillon**

Au cours des 12 derniers jours, le cours de clôture de l'action delta est relevé, ainsi que la valeur de l'indice de marché.

Jours	Cours action	Valeur de l'indice
1	196,18	102,30
2	195,80	102,20
3	194,55	101,60
4	194,14	101,40
5	193,75	100,60
6	195,11	101,40
7	196,35	102,10
8	197,00	103,60
9	197,30	104,70
10	198,00	105,80
11	198,20	106,00
12	199,00	107,50

Travail à faire

1. Calculer les rentabilités quotidiennes, la moyenne de la rentabilité sur la période, la variance et l'écart-type de la rentabilité de l'action et de l'indice.
2. Calculer le bêta de l'action.

CORRIGÉ 02.01**1. Rentabilités quotidiennes et rentabilité moyenne sur la période**

Puisqu'il s'agit des cours de clôture, la formule suivante permet de calculer les rentabilités quotidiennes :

Rentabilité_t = $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, où P_t est le cours de clôture de la séance et P_{t-1} le cours de clôture de la veille.

La rentabilité moyenne est ensuite calculée par : $E(R_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_{i,t}$

Puisque l'on dispose des cours de 12 séances, on obtient 11 rentabilités ($R_{i,t}$).

$$E(R_i) = \frac{1}{11} \sum_{t=1}^n R_{i,t}$$

Jours	Cours actions	Rentabilité de l'action	Valeur de l'indice	Rentabilité de l'indice
1	196,18		102,3	
2	195,80	- 0,19 %	102,2	- 0,10 %
3	194,55	- 0,64 %	101,6	- 0,59 %
4	194,14	- 0,21 %	101,4	- 0,20 %
5	193,75	- 0,20 %	100,6	- 0,79 %
6	195,11	0,70 %	100,4	- 0,20 %
7	196,35	0,64 %	102,1	1,69 %
8	197,00	0,33 %	103,6	1,47 %
9	197,30	0,15 %	104,7	1,06 %
10	198,00	0,35 %	105,8	1,05 %
11	198,20	0,10 %	106,0	0,19 %
12	199,00	0,40 %	107,5	1,42 %
Moyenne		0,13 %		0,46 %

2. Calcul de la variance et de l'écart-type de la rentabilité de l'action et de l'indice

$$\text{Variance}_i = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{i,t} - E(R_i))^2 \text{ et } \text{Ecart - Type}_i = \sqrt{\text{Variance}_i}$$

Jours	Action	Indice
	$(R_{i,t} - E(R_i))^2$	$(R_{m,t} - E(R_m))^2$
1		
2	0,0011 %	0,0031 %
3	0,0059 %	0,0109 %
4	0,0012 %	0,0043 %
5	0,0011 %	0,0155 %
6	0,0033 %	0,0043 %
7	0,0025 %	0,0153 %
8	0,0004 %	0,0103 %
9	0,0000 %	0,0037 %
10	0,0005 %	0,0035 %
11	0,0000 %	0,0007 %
12	0,0007 %	0,0092 %
Moyenne	0,0167 %	0,0807 %
Variance	0,0017 %	0,0081 %
Écart-type	0,4087 %	0,8982 %

3. Calcul du bêta de l'action

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{V(R_m)} \text{ avec :}$$

$$\text{Cov}(R_i, R_m) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{i,t} - E(R_i))(R_{m,t} - E(R_m))$$

$$\text{et } V(R_m) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{m,t} - E(R_m))^2 = 0,0081\%$$

Jour	$(R_{i,t} - E(R_i)) (R_{m,t} - E(R_m))$
1	
2	0,0018 %
3	0,0080 %
4	0,0022 %
5	0,0041 %
6	- 0,0037 %
7	0,0063 %
8	0,0020 %
9	0,0001 %
10	0,0013 %
11	0,0001 %
12	0,0026 %
Somme	0,0249 %
Covariance	0,0025 %

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{V(R_m)} = \frac{0,0025 \%}{0,0081 \%} = 0,309$$

EXERCICE 02.02 *

Thème : Espérance, variance et écart-type des rentabilités à partir d'une distribution

Soit la distribution de rentabilités suivante :

Probabilité	Rentabilité
15 %	- 5 %
20 %	10 %
30 %	20 %
20 %	30 %
15 %	45 %

Travail à faire

1. Calculer l'espérance de la rentabilité.
2. Calculer la variance et l'écart-type de la rentabilité.

CORRIGÉ 02.02

1. Calcul de l'espérance de la rentabilité

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^n p_j R_{i,j}$$

Avec P_j est la probabilité que la rentabilité du titre i soit égale à R_{ij} .

Probabilité	Rentabilité	
P_j	R_{ij}	$P_j \times R_{ij}$
15 %	- 5 %	- 0,75 %
20 %	10 %	2,00 %
30 %	20 %	6,00 %
20 %	30 %	6,00 %
15 %	45 %	6,75 %
Espérance		20 %

2. Calcul de la variance et l'écart-type de la rentabilité

$$V(R_i) = \sum_{j=1}^n P_j \times (R_{ij} - E(R_i))^2 = \sum_{j=1}^n P_j \times R_{ij}^2 - E(R_i)^2$$

Probabilité	Rentabilité	
P_j	R_{ij}	$P_j \times (R_{ij} - E(R_i))^2$
15 %	- 5 %	0,9375 %
20 %	10 %	0,2000 %
30 %	20 %	0,0000 %
20 %	30 %	0,2000 %
15 %	45 %	0,9375 %
Espérance	20 %	
Variance		2,2750 %
Écart-type		15,0831 %

EXERCICE 02.03 **

Thème : Espérance, variance de rentabilité et détermination du portefeuille de variance minimum composé de deux titres

Probabilité	Rentabilité du titre A	Rentabilité du titre B
25 %	15 %	10 %
25 %	- 5 %	30 %
25 %	10 %	15 %
25 %	20 %	5 %

Travail à faire

1. Calculer l'espérance et la variance des rentabilités des titres A et B ;
2. Calculer la covariance entre les rentabilités des deux titres ;
3. Calculer la composition du portefeuille de variance minimum. Calculer son espérance et sa variance ;
4. Montrer que lorsque le coefficient de corrélation entre la rentabilité de deux titres est égale à $- 1$, il est possible de constituer un portefeuille de risque nul.

CORRIGÉ 02.03

1. Calcul de l'espérance et la variance de rentabilité des titres A et B.

L'espérance de rentabilité calculée à partir d'une distribution de probabilités est égale à :

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^n P_j \times R_{i,j}$$

avec P_j la probabilité que la rentabilité du titre i soit égale à $R_{i,j}$.

La variance est égale à :

$$V(R_i) = \sum_{j=1}^n P_j \times (R_{i,j} - E(R_i))^2 = \sum_{j=1}^n P_j \times R_{i,j}^2 - E(R_i)^2$$

Probabilité P_j	Rentabilité de A : $R_{A,j}$	Rentabilité de B : $R_{B,j}$	$P_j \times R_{A,j}$	$P_j \times R_{B,j}$	$P_j \times [R_{A,j} - E(R_A)]^2$	$P_j \times [R_{B,j} - E(R_B)]^2$
25 %	15,00 %	10,00 %	3,75 %	2,50 %	0,0625 %	0,0625 %
25 %	- 5,00 %	30,00 %	- 1,25 %	7,50 %	0,5625 %	0,5625 %
25 %	10,00 %	15,00 %	2,50 %	3,75 %	0,0000 %	0,0000 %
25 %	20,00 %	5,00 %	5,00 %	1,25 %	0,2500 %	0,2500 %
			10,00 %	15,00 %	0,875 %	0,875 %

L'espérance de la rentabilité du titre A est de 10 % et sa variance de 0,875 %.

L'espérance du titre B est de 15 % et sa variance de 0,875 %.

2. Calcul de la covariance entre les rentabilités des deux titres

$$\text{Cov}(R_A, R_B) = \sum_{j=1}^n P_j \times (R_{A,j} \times R_{B,j} - E(R_A) \times E(R_B)) = \sum_{j=1}^n P_j \times R_{A,j} R_{B,j} - E(R_A) \times E(R_B)$$

Probabilité	Rentabilité de A ($R_{A,j}$)	Rentabilité de B ($R_{B,j}$)	$P_j R_{A,j} R_{B,j}$
25 %	15,00 %	10,00 %	0,375 %
25 %	- 5,00 %	30,00 %	- 0,375 %
25 %	10,00 %	15,00 %	0,375 %
25 %	20,00 %	5,00 %	0,250 %
Somme			0,625 %
Covariance			- 0,875 %

3. Composition du portefeuille de variance minimum

Le portefeuille de variance minimum est le portefeuille, composé de titres A et B, pour lequel le risque est le plus faible possible.

L'objectif est ici de déterminer la composition (w_A et w_B) qui permet de minimiser la variance du portefeuille.

$$V [R_p] = w_A^2 \times V [R_A] + (w_B)^2 \times V [R_B] + 2 \times w_A \times w_B \times \text{Cov} (R_A, R_B)$$

or $w_B = 1 - w_A$

donc

$$V [R_p] = w_A^2 \times V [R_A] + (1 - w_A)^2 \times V [R_B] + 2 \times w_A \times (1 - w_A) \times \text{Cov} (R_A, R_B)$$

$$V [R_p] = w_A^2 V [R_A] + V [R_B] + w_A^2 V [R_B] - 2w_A V [R_B] + 2w_A \text{Cov} (R_A, R_B) - 2w_A^2 \text{Cov} (R_A, R_B)$$

Le portefeuille de risque minimum est obtenu lorsque la dérivée première de sa variance $V [R_p]$ est nulle, et que la dérivée seconde est positive.

Dérivée première nulle :

$$\frac{dV [R_p]}{dw_A} = 2w_A \times V [R_A] + 2w_A \times V [R_B] - 2 \times V [R_B] + 2 \times \text{Cov} (R_A, R_B) - 4 \times w_A \times \text{Cov} (R_A, R_B)$$

$$w_A = \frac{V [R_B] - \text{Cov} (R_A, R_B)}{V [R_A] + V [R_B] - 2 \times \text{Cov} (R_A, R_B)}$$

et

$$w_B = 1 - w_A = \frac{V [R_A] - \text{Cov} (R_A, R_B)}{V [R_A] + V [R_B] - 2 \times \text{Cov} (R_A, R_B)}$$

Dérivée seconde positive :

$$2 V [R_A] + 2 V [R_B] - 4 \text{Cov} (R_A, R_B) \geq 0$$

Or :

$$A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 \text{ et } V [R_A] = \sigma_A^2$$

D'où :

$$2 (\sigma_A - \sigma_B)^2 \geq 0$$

Or un carré est toujours positif.

$$w_A = \frac{V [R_B] - \text{Cov} (R_A, R_B)}{V [R_A] + V [R_B] - 2 \text{Cov} (R_A, R_B)} = \frac{0,875 \% - (-0,875 \%)}{(0,875 \% + 0,875 \%) - 2 \times (-0,875 \%)} = \frac{2}{4} = 50 \%$$

Le portefeuille de variance minimale est composé à 50 % de titres A et à 50 % de titres B.

Calcul de l'espérance et de la variance de ce portefeuille

L'espérance de rentabilité du portefeuille est égale à la moyenne pondérée de l'espérance de rentabilité des titres qui le composent :

$$E [R_p] = w_A E [R_A] + w_B E [R_B] = 50 \% \times 10 \% + 50 \% \times 15 \% = 12,5 \%$$

La variance de ce portefeuille est égale à :

$$V [R_p] = w_A^2 V [R_A] + w_B^2 V [R_B] + 2w_A w_B \text{Cov} (R_A, R_B)$$

$$V [R_p] = (50 \%)^2 \times 0,875 \% + (50 \%)^2 \times 0,875 \% + 2 \times (50 \%) \times (50 \%) \times (-0,875 \%) = 0$$

4. Montrer que lorsque le coefficient de corrélation entre la rentabilité de deux titres est égale à - 1, il est possible de constituer un portefeuille de risque nul.

$$V [R_p] = w_A^2 V [R_A] + w_B^2 V [R_B] + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 - 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B$$

$$V [R_p] = (w_A \sigma_A - w_B \sigma_B)^2$$

Le portefeuille de risque minimum a un risque nul lorsque $\rho_{AB} = - 1$:

$$\sigma_p = (w_A \sigma_A - w_B \sigma_B) = 0$$

$$\text{avec } w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_B + \sigma_A} \text{ et } w_B = \frac{\sigma_A}{\sigma_B + \sigma_A}$$