

MULTIPLICATION ET DIVISION DANS L'ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

I. Les programmes

1. Multiplication posée

De nombreuses techniques de calcul de produits ont été élaborées au cours des temps et, aujourd'hui encore, les techniques utilisées ne sont pas toujours identiques d'un pays à l'autre. L'étude de certaines d'entre elles peut d'ailleurs être conduite avec une visée culturelle et comme support à un travail sur les propriétés de la multiplication. Mais, seule la technique usuelle française doit être maîtrisée par les élèves.

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances :

- tables de multiplication ;
- numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;
- règle des 0 : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même nombre par 30, par 300... ;
- distributivité de la multiplication sur l'addition.

Certaines de ces connaissances commencent à être travaillées au cycle 2, mais la maîtrise nécessaire à la compréhension de la technique de la multiplication posée ne commence à être assurée qu'au cours de la première année du cycle 3.

Le cas de la technique de multiplication de nombres à deux ou trois chiffres... par un nombre à un chiffre est plus simple et sa maîtrise constitue un préalable à celle de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Elle repose sur les principes de la numération décimale et la connaissance des produits des nombres à un chiffre (les tables de multiplication) ainsi que sur la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($27 \times 6 = 7 \times 6 + 20 \times 6$). Au cours d'une première étape, certains élèves peuvent être autorisés à utiliser un répertoire écrit de ces tables pour alléger la charge de travail. Cette technique peut être mise en relation avec le calcul de l'addition itérée (posée) d'un même nombre.

Le cas de la technique de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres intervient plus tard. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier 523 par 200 et par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la première année ou la deuxième année du cycle 3.

Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer.

2. Division posée

La technique usuelle française, telle qu'elle a été longtemps enseignée, est très dépouillée (pas de soustractions posées) et donc source de nombreuses erreurs. De plus, celles-ci sont difficiles à repérer puisque tous les calculs effectués n'ont pas donné lieu à une trace écrite.

Il s'agit d'un calcul « à risque », insécurisant, dans la mesure où un chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est également le seul calcul où l'estimation intervient en cours de calcul.

Il faut également souligner le peu d'usage qui est actuellement fait de cette technique... et en tirer la conséquence : plus encore que pour les autres opérations, le travail doit être principalement orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul.

- Division euclidienne de deux nombres entiers

Cette technique est la seule dont la connaissance est demandée à la fin de l'école primaire. Sa compréhension suppose de nombreuses connaissances préalables :

- maîtrise des deux « sens » de la division :
 - « quelle est la valeur de chaque part ? » (diviser 2 782 par 26, revient à partager 2 782 en 26 parts égales et chercher la valeur d'une part),
 - « combien de fois ? » (diviser 2 782 par 26, revient à chercher combien de fois 26 est contenu dans 2 782).
- maîtrise des tables de multiplication (ce qui englobe la recherche de « combien de fois 7 dans 59 ? », qui n'est pas directement dans la table de multiplication par 7) ;
- capacité à prévoir le nombre de chiffres du quotient, par encadrement ou par partage d'une partie du dividende.

A partir de là, plusieurs étapes peuvent être envisagées. Un temps préalable suffisant doit être consacré au calcul réfléchi de quotients et de restes. En effet, ce type de calcul donne l'occasion aux élèves de mettre en œuvre, en acte, des compétences également sollicitées dans l'exécution de la technique opératoire.

Ainsi, diviser mentalement 1 548 par 7 incite à décomposer 1 548 en $1\,400 + 148$, après avoir repéré que 1 400 est divisible par 7 (résultat : 200), puis 148 en $140 + 8$ pour déterminer les deux autres composantes du quotient (20 et 1) et le reste (1). Le quotient s'obtient par addition des quotients partiels : $200 + 20 + 1 = 221$.

La seconde étape vers la technique peut consister à effectuer des divisions par un nombre à un chiffre, avant de travailler sur des divisions plus complexes, tout en limitant le niveau de difficulté.

Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites :

- commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient (ce qui permet un premier moyen de contrôle sur le quotient) ;
- s'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient (la production de la totalité de « la table du diviseur » ne doit pas être encouragée) ;
- encourager la pose effective des soustractions (sans interdire toutefois aux élèves qui le souhaitent de s'en dispenser).

3. Cycle des apprentissages fondamentaux

- Calcul

L'usage dans des cas simples (résultat à deux, trois ou quatre chiffres) de l'addition, la soustraction et la multiplication doit être assuré.

- Compétences visées

- Résultats mémorisés, procédures automatisées

- Connaître et utiliser les tables de multiplication par deux et par cinq.
 - Savoir multiplier par dix.

- Calcul

- Calcul réfléchi : organisation et traitement de calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs, mentalement ou avec l'aide de l'écrit.

- Problèmes résolus en utilisant une procédure experte

- Déterminer, par multiplication, la quantité (ou la valeur) obtenue par réunion ou itération de plusieurs quantités (ou valeurs) identiques.

4. Cycle des approfondissements

- Exploitation de données numériques

Le sens des opérations doit être au centre des préoccupations.

A la fin du cycle 3, les élèves doivent être capables de reconnaître quelle opération permet de résoudre la plupart des problèmes qui peuvent être traités à l'aide d'une seule opération. Certains problèmes à une opération ne sont cependant pas reconnus comme tels par tous les élèves et nécessitent le recours à des procédures personnelles : c'est par exemple le cas de certains problèmes de division euclidienne que les élèves vont résoudre par soustractions successives ou par essais de produits. Ces solutions ne doivent pas être rejetées, mais au contraire encouragées chaque fois que le calcul expert n'est pas reconnu par les élèves. Par ailleurs, en utilisant des procédures expertes ou personnelles, les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes nécessitant le recours à des étapes intermédiaires.

Les élèves sont entraînés à choisir le procédé de calcul le plus adapté pour trouver un résultat numérique à un problème : calcul mental exact ou approché, calcul posé, calcul instrumenté.

- Problèmes relevant des quatre opérations

Il s'agit de résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées.

Chaque fois que c'est possible, les situations issues de la vie de la classe ou du travail dans d'autres disciplines sont privilégiées. Les connaissances numériques des élèves, qu'elles portent sur les nombres ou sur le calcul, n'ont d'intérêt que si elles peuvent être mobilisées pour résoudre des problèmes. Selon les problèmes proposés, selon la maîtrise qu'il a des connaissances en jeu, l'élève a recours aux procédures expertes ou élabore des procédures personnelles de résolution.

Au cycle 3, on propose des problèmes nécessitant des raisonnements et la détermination d'étapes intermédiaires. Pour les problèmes à étapes, la solution peut être donnée sous différentes formes : suite de calculs, calcul avec parenthèses...

Certaines activités de calcul mental s'appuient sur des petits problèmes qui permettent de renforcer le sens des opérations et la connaissance des propriétés sur les nombres. La résolution de problèmes s'appuie elle-même souvent sur des démarches mentales grandement facilitées par une bonne capacité à calculer mentalement.

- Calcul

Les compétences en calcul mental (résultats mémorisés, calcul réfléchi exact ou approché) sont à développer en priorité. En effet, le calcul mental réfléchi est l'occasion de rencontrer diverses façons d'effectuer un même calcul et d'avoir à justifier celle qui a été choisie, ce qui peut donner lieu à des premières activités de preuve. Le recours à des jeux numériques fournit un cadre propice à la pratique du calcul mental.

Le calcul réfléchi ne se limite pas toujours à un calcul mental. Il peut s'appuyer sur des traces écrites qui, de plus, rendent compte des différentes étapes utilisées et, donc, du raisonnement mis en œuvre.

Le calcul posé ne doit pas faire l'objet d'une recherche de virtuosité excessive. Il doit être abordé principalement dans l'optique de favoriser la compréhension des propriétés qui interviennent dans chaque technique opératoire.

- Compétences visées

- Résultats mémorisés, procédures automatisées

- Connaître les tables de multiplication (de 2 à 9) et les utiliser pour calculer un produit ou un quotient entier.
 - Multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
 - Calculer le produit de deux entiers ou le produit d'un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé.
 - Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres), par un calcul posé.

- Calcul

- Techniques opératoires : addition, soustraction de nombres entiers ou décimaux, multiplication de deux nombres entiers ou d'un nombre décimal par un nombre entier, division euclidienne de deux nombres entiers (quotient entier et reste).

- Calcul réfléchi

- Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul additif, soustractif, multiplicatif en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations.

- Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul de division en s'appuyant sur les résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations.
- Evaluer le nombre de chiffres d'un quotient entier.

II. Champ conceptuel des structures multiplicatives

1. Notion de champ conceptuel

L'approche choisie ici est fondée sur l'idée de « champ conceptuel » proposée par G. Vergnaud.

« On appelle champ conceptuel un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter »¹.

Ainsi la situation classique d'achat à l'unité peut-elle donner lieu :

- à un problème qui sera reconnu comme relevant de la multiplication : « Quel est le prix de 15 objets valant 6 € l'un ? » ;
- à un problème qui sera reconnu comme relevant de la division : « Quel est le prix d'un objet si je sais que j'ai payé 15 de ces objets 90 € ? » ;
- à un problème qui sera reconnu comme relevant de la proportionnalité : « Quel est le prix de 15 objets valant 30 € les 5 ? ».

Tous ces problèmes peuvent être schématisés par un même type de tableau qui permet de mettre en évidence que dans cette situation d'achat deux grandeurs (la quantité et le prix) sont mises en relation.

quantité	prix		quantité	Prix		quantité	prix
1	6		1	?		5	30
15	?		15	90		15	?

Le champ conceptuel des structures multiplicatives regroupe les problèmes qui peuvent être résolus en utilisant une multiplication, une division ou une suite de multiplications et de divisions (ce qui recouvre également les problèmes de proportionnalité).

¹ G. Vergnaud, Apprentissages et didactiques, où en est-on ?, Hachette, 1995.

2. Champ conceptuel des structures multiplicatives

Types de situations et de problèmes	Exemples	Remarques
Proportion simple avec présence de l'unité $\begin{array}{c c} 1 & c \\ b & d \end{array}$ a) Problèmes de multiplication (on donne b et c, on cherche d) $\begin{array}{c c} 1 & c \\ b & ? \end{array}$ b) Problèmes de division-partition (recherche de la valeur d'une part) $\begin{array}{c c} 1 & ? \\ b & d \end{array}$	A - Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers. En partant de 0 j'ai avancé de 14 bonds de longueur 12. Quelle est la position d'arrivée ? B - J'ai collé 32 timbres sur chaque page d'un album de 14 pages. Combien y a-t-il de timbres dans l'album ? C - Dans une bande, j'ai découpé 14 rubans de 7 cm chacun. Quelle longueur de bande ai-je utilisé ? D - Je veux faire 11 paquets identiques de 25 bonbons chacun. Combien me faut-il de bonbons ? A - Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers. En partant de 0 et en 14 bonds, le pion arrive à la position 168. Quelle est la valeur de chaque bond ? B - J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbres sur chaque page. Combien y a-t-il de timbres sur chaque page ? C - Dans une bande de 100 cm j'ai découpé 14 rubans de même longueur. Quelle est la longueur de chaque ruban ? D - Avec 275 bonbons je veux faire 11 paquets identiques. Combien y aura-t-il de bonbons dans chaque paquet ?	1) Toutes ces situations peuvent se modéliser par une écriture du type : $c = b \times q$ ou $c = b \times q + r$ avec $r < b$ ou $b \times q \leq c \leq b \times (q + 1)$ C'est, en réalité le contexte qui impose ou non l'existence d'un reste (pour les problèmes A et B de b et pour le problème A de c, la formulation laisse entendre que le reste est nul). Le contexte est donc ici une variable importante, qui conditionne la mise en équation du problème et permet de décider de l'utilisation de la division euclidienne (problème D) ou de la division dans Q (problème C), avec recherche d'une approximation décimale du quotient. 2) Les nombres utilisés sont situés - soit dans un contexte ordinal (sauts réguliers sur une piste graduée, évocation du comptage de n en n pour le problème A) ; - soit dans un contexte cardinal (évocation d'objets isolés pour les problèmes B et D) ; - soit dans un contexte de mesure (problème C). Les schématisations possibles sont alors de nature différente. 3) Tous les problèmes sont formulés ici avec des <u>nombres naturels</u> (mais le résultat n'est pas toujours un naturel)

c) Problèmes de division-quotition (recherche du « nombre de parts ») <table border="0"> <tr> <td>1</td> <td> </td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>?</td> <td> </td> <td>d</td> </tr> </table>	1		c	?		d	A - Je déplace un pion sur une piste graduée, en partant de 0, par bonds réguliers de longueur 12. Je suis arrivé à la position 168. En combien de bonds ? B - J'ai collé 448 timbres dans un album. Il y a 32 timbres sur chaque page. Combien de pages ont été remplies ? C - Dans une bande de 100 cm j'ai découpé des rubans de 7 cm. Combien de rubans ? D - Avec 275 bonbons je veux faire des paquets identiques de 25 bonbons. Combien y aura-t-il de paquets remplis ?	
1		c						
?		d						
Proportion simple sans présence de l'unité <table border="0"> <tr> <td>a</td> <td> </td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td> </td> <td>d</td> </tr> </table>	a		c	b		d	Voir le chapitre sur la proportionnalité	Les problèmes possibles faisant intervenir trois nombres donnés ne peuvent pas être résolus par le seul produit ou quotient de deux nombres.
a		c						
b		d						
Problème du type « fois plus, fois moins » <table border="0"> <tr> <td>« objet » A</td> <td> </td> <td>a</td> </tr> <tr> <td>« objet » B</td> <td> </td> <td>b</td> </tr> </table>	« objet » A		a	« objet » B		b	A - Pierre a 6 ans. Son père est quatre fois plus âgé que lui. Quel est son âge ? B - Jean a fait un parcours en voiture de 620 km. André a parcouru une distance quatre fois moins importante. Quelle est la distance parcourue par André ?	On peut aussi avoir à quantifier la relation « combien de fois plus ? » ou « combien de fois moins ? ».
« objet » A		a						
« objet » B		b						
Produit de mesures Problèmes de multiplication	A - Quel est le nombre de carreaux sur une page de cahier quadrillé de 26 carreaux sur 62 carreaux ? B - Avec 3 sortes de figures (carré, triangle, rond) et 6 couleurs, combien peut-on réaliser de pièces différentes ? C - Quelle est l'aire d'un champ rectangulaire de 84 m sur 105 m ?	Problèmes schématisables par un tableau à double entrée ou par l'aire d'un rectangle. 1) Tous les problèmes de division peuvent être modélisés par l'équation : $n = b \times x$ qui correspond soit à une division euclidienne avec reste nul (problèmes A et B posés dans un contexte cardinal), soit à une division dans $\mathbb{Q}$ (problème C posé dans un contexte de mesure).						

Problèmes de division	A - Pour faire un quadrillage rectangulaire de 175 carreaux ayant 7 carreaux sur un côté, combien faut-il de carreaux sur l'autre côté ? B - Jean a 3 chemises différentes. Combien doit-il acheter de pantalons différents pour avoir 18 façons de s'habiller ? C- Un rectangle de 8 m de largeur a pour aire 224 m². Quelle est sa longueur ?	2) Là aussi, c'est la formulation du problème qui peut laisser ouverte la possibilité d'un reste non nul ; par exemple pour le problème A : « J'ai 175 carreaux. Je veux réaliser un quadrillage rectangulaire le plus grand possible ayant 7 carreaux sur un côté. Combien y aura-t-il de carreaux sur l'autre côté ? ».
Proportion double $\begin{array}{c c} a & (c, e) \\ b & (d, f) \end{array}$	Problèmes relatifs à des situations dans lesquelles une grandeur varie proportionnellement à deux grandeurs indépendantes : prix à payer en fonction du nombre de personnes et de la durée du séjour.	Cette structure donne, en général, lieu à des problèmes qui font intervenir plus d'un calcul. L'exemple suivant ne fait cependant intervenir qu'un produit (mais ils pourraient être traités comme des problèmes de proportion simple) : Exemple : « Le prix d'une journée au ski est de 28 € par jour et par personne. Combien paiera une personne pour 6 jours ? Combien paieront 4 personnes pour une journée ? »
Proportion simple composée $\begin{array}{c c c} a & c & e \\ b & d & f \end{array}$	Problèmes relatifs à des situations dans lesquelles une grandeur varie proportionnellement à une autre qui varie, elle même, proportionnellement à une troisième. Exemple : « Dans un carnet de timbres, il y a 10 timbres. Chaque timbre coûte 0,6 €. On achète 12 carnets. »	Cette structure donne, en général, lieu à des problèmes qui font intervenir plus d'un calcul.

III. Procédures utilisées par les élèves

1. Résolution des problèmes de « multiplication »

- Exemple de problème qui peut être résolu par la multiplication de deux nombres de l'énoncé : « Le directeur de l'école a acheté x boîtes de y crayons chacune. Combien a-t-il acheté de crayons ? ».

Ce problème, situé dans un contexte familier, peut être modélisé comme problème de « proportion simple avec présence de l'unité » et schématisé par :

nombre de boîtes	nombre de crayons
1	y
x	?

Le nombre 1 n'est pas explicitement donné dans l'énoncé, mais indiqué par le mot « chacune ».

- Les principales variables didactiques sont :
 - les valeurs qui peuvent être données aux nombres x et y . Ces valeurs vont influencer sur l'efficacité des différentes procédures de résolution qui peuvent être utilisées par les élèves.

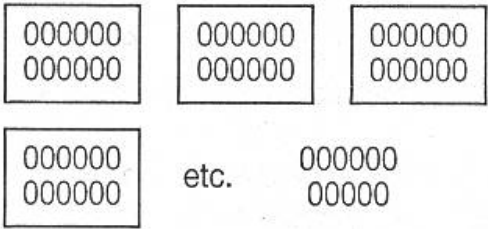
Valeurs de x et de y	Types de procédures
x et y « petits » ($x = 4$, $y = 6$)	- Procédure utilisant le support d'un dessin ou schéma : l'élève dessine les 4 paquets de 6 crayons  puis il dénombre les crayons « un par un » ou « de six en six ». - Procédure additive : $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ ou $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ 1 2 3 4 - Procédure multiplicative : calcul mental de 6×4 par référence à la table de multiplication.
x petit et y « assez grand » ($x = 6$, $y = 48$)	- Les procédures utilisant le support d'un dessin deviennent très coûteuses. - Les procédures de type additif sont efficaces (à condition toutefois de savoir calculer des sommes de nombres ayant 2 ou 3 chiffres).

	La procédure multiplicative est très efficace si on sait réaliser les calculs du type 48×6 ou si on dispose d'une calculatrice. Dans le cas où $x = 10$, cette procédure multiplicative devient très avantageuse si on dispose de la « règle de multiplication par 10 ».
x et y « grands » ($x = 34$, $y = 64$)	- Les procédures de type « dessin » sont inutilisables pour résoudre complètement le problème. - Les procédures de type additif deviennent très difficiles (contrôle du nombre d'itérations de y, nombre de calculs à effectuer). Des procédures additives qui utilisent des multiples de y peuvent être mobilisées : - utilisation de doubles : $128 + 128 + 128 + \dots$ - utilisation de produits par 10 : $640 + 640 + 640 + 64 + 64 + 64 + 64$ Les calculs sont alors plus simples, mais le contrôle du nombre d'itérations de y est plus difficile. - Les procédures multiplicatives (calcul direct de 64×34 à la main ou à la calculatrice) sont les plus efficaces. Certaines valeurs de x ou de y peuvent rendre les calculs plus faciles et exécutables mentalement (valeurs comme 20, 100, 50, 25, ...)

2. Résolution des problèmes de « division »

Les différentes procédures sont résumées ci-dessous à partir du problème suivant : « On range 273 œufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut-on remplir ? ».

- Procédures imaginées

1. Dessin figuratif  2. Dessin schématisé 	L'élève essaie de simuler l'action évoquée par un dessin plus ou moins schématisé. Cette procédure devient très vite peu économique et difficile à gérer dès que les nombres deviennent plus grands. Il s'agit parfois de procédures d'entrée dans le problème qui permettent à l'élève de comprendre la situation et d'imaginer une autre procédure plus rapide.
--	---

- Procédures progressives fondées sur l'addition ou la soustraction

3. Additions « pas à pas » $12 + 12 = 24 + 12 = 36 + 12 = 48$, etc. ou $12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60$ $12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60$ $60 + 60 = 120$, etc. 4. Soustractions « pas à pas » $273 - 12 = 261$ $261 - 12 = 249$ $249 - 12 = 237$, etc. 5. Additions ou soustractions de multiples ou diviseurs <table style="width: 100%; border: none;"><tr><td style="text-align: right; padding-right: 20px;">$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ + 48 \\ \hline 144 \\ \text{etc.} \end{array}$</td><td style="text-align: center; vertical-align: middle;">ou</td><td style="text-align: right;">$\begin{array}{r} 273 \\ - 48 \\ \hline 225 \\ - 48 \\ \hline 177 \\ \text{etc.} \end{array}$</td></tr></table> Avec toutes ces procédures, il faut à la fin retrouver le nombre de fois où 12 a été additionné ou soustrait.	$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ + 48 \\ \hline 144 \\ \text{etc.} \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} 273 \\ - 48 \\ \hline 225 \\ - 48 \\ \hline 177 \\ \text{etc.} \end{array}$	Cette suite d'égalités, incorrectes du point de vue mathématique, traduit cependant la démarche de l'élève qui simule le remplissage des boîtes une à une en faisant le bilan des œufs utilisés après chaque boîte. Procédure comparable à la précédente, mais l'élève fait des bilans partiels du nombre d'œufs utilisés et réutilise ses calculs antérieurs. L'élève s'intéresse ici aux œufs restants à mettre en boîtes plutôt qu'aux œufs déjà utilisés. Ces procédures deviennent vite coûteuses avec des nombres assez grands. D'autre part, certains élèves, parvenus à la fin de leurs calculs, ne savent plus comment trouver le nombre de boîtes (surcharge cognitive). Ces procédures sont en fait des améliorations des procédures précédentes, l'élève utilisant le plus souvent un résultat obtenu mentalement (qui correspond au remplissage de plusieurs boîtes). Elles deviennent plus efficaces lorsque l'élève a l'idée d'utiliser des multiples de 10 (et plus tard de 100), ce qui allège la charge de calcul. Toutes ces procédures peuvent conduire à la réussite, à condition que les nombres ne soient pas trop grands
$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ + 48 \\ \hline 144 \\ \text{etc.} \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} 273 \\ - 48 \\ \hline 225 \\ - 48 \\ \hline 177 \\ \text{etc.} \end{array}$		

- Procédures multiplicatives (l'élève cherche à résoudre une équation du type $a \times x = b$)

6. Pose effective de la multiplication à trou $\begin{array}{r} 12 \\ \times \dots \\ \hline 273 \end{array}$	Procédure délicate lorsque, comme dans l'exemple, le reste n'est pas nul, mais qui peut être une procédure d'entrée vers les procédures suivantes.
7. Essais de multiples successifs du diviseur $12 \times 10 = 120 \quad 12 \times 11 = 132$ $12 \times 12 = 144 \quad 12 \times 13 = 156$ etc.	Procédure qui peut être fastidieuse si l'élève commence son exploration « trop bas », souvent abandonnée au profit de la suivante.
8. Essais par approches successives $\begin{array}{r} 12 \\ \times 30 \\ \hline 360 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 25 \\ \hline 300 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 15 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 20 \\ \hline 240 \end{array} \quad \text{etc.}$	L'efficacité de cette procédure dépend à la fois de la qualité de l'approximation effectuée au départ et des ajustements successifs en fonction de l'écart du résultat obtenu avec le nombre cible qu'est le dividende. Elle conduit souvent à la réussite, car moins sensible que d'autres à la taille des nombres en présence.

- Procédures mixtes (utilisation de la multiplication et de la soustraction)

9. Quotients partiels « au hasard » $\begin{array}{r} 12 \quad 273 \\ \times 15 \quad -180 \\ \hline 180 \quad 93 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad 93 \\ \times 7 \quad -84 \\ \hline 84 \quad 9 \end{array}$ quotient : $15 + 7 = 22$, reste : 9	Pour ces procédures mixtes, l'élève fait un essai de multiple (inférieur au dividende), calcule l'écart entre ce produit et le dividende, puis recommence avec l'écart. Il obtient ainsi une suite de quotients partiels qu'il doit ensuite additionner.
10. Utilisation de multiples de 10, 100, ... pour les quotients partiels $\begin{array}{r} 12 \quad 273 \\ \times 20 \quad -240 \\ \hline 240 \quad 33 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad 33 \\ \times 2 \quad -24 \\ \hline 24 \quad 9 \end{array}$ Ces types de procédures peuvent déboucher sur une présentation traditionnelle « en potence ». $\begin{array}{r} 273 \\ -240 \\ \hline 33 \\ -24 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 20 \\ 2 \end{array}$	

- Utilisation de la division

11. Calcul de la division de 273 par 12 ou utilisation d'une calculatrice	Ici l'élève a reconnu le modèle expert dont relève le problème proposé.
---	---

IV. Les principales variables didactiques

1. Problèmes qui se résolvent par une multiplication ou une division

Plusieurs facteurs influent sur la plus ou moins grande difficulté du problème :

- le type de problème : les problèmes de type « proportion simple » (avec présence de l'unité) sont, par exemple, souvent mieux réussis que les problèmes du type « produit de mesures » ;
- les types de nombres utilisés : les nombres décimaux posent, dans les problèmes multiplicatifs, des difficultés tout à fait particulières ;
- la taille des nombres en jeu qui rend possible ou non telle ou telle catégorie de procédures ;
- les outils de calcul disponibles ou non (calculatrice, par exemple, qui permet de ne pas faire intervenir les compétences en calcul des élèves) ;
- le type de contexte auquel se réfère la situation évoquée, plus ou moins familière aux élèves ;
- la manière dont l'énoncé est formulé.

2. Problèmes « de division »

Trois variables didactiques peuvent être plus particulièrement mises en évidence :

- la taille des nombres correspondant au dividende et au diviseur (en particulier, une résolution par recours à un « dessin » de la situation ou une résolution mentale sont-elles possibles ou non ? le traitement par une suite d'additions ou de soustractions répétées est-il possible à un coût peu élevé ? ...) ;
- la valeur du quotient : plus ou moins facile à calculer selon qu'il est ou non composé d'un seul chiffre ou qu'il s'exprime par un nombre entier de dizaines ou de centaines, ...
- l'existence ou non d'un reste non nul (qui peut rendre les calculs plus ou moins facilement interprétables).

V. Apprentissage de la technique opératoire de la multiplication

1. Les étapes de l'apprentissage

La construction progressive de la technique usuelle avec les élèves est le plus souvent envisagée au CE2. L'analyse des difficultés permet de préciser les connaissances préalables nécessaires à cet apprentissage. Celles-ci sont de plusieurs types :

- les produits de la table de multiplication doivent être disponibles rapidement : une bonne mémorisation en est donc indispensable ;
- la décomposition des nombres en fonction de leur écriture en base dix doit être maîtrisée (décomposition du type : $408 = 400 + 8$ ou $408 = 8 + 400$) ;
- le repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre (unités, dizaines,...) est indispensable pour une bonne gestion des retenues ;
- les élèves doivent être capable de remplacer un produit par une somme de produits : utilisation « en acte » de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, par exemple remplacer 387×408 par $(387 \times 8) + (387 \times 400)$;
- savoir que $387 \times 400 = (387 \times 4) \times 100$: utilisation « en acte » de l'associativité de la multiplication ;
- connaître la règle des « 0 » (comment multiplier par 100).

Plusieurs scénarios peuvent être envisagés (ils dépendent en grande partie de la signification qui est initialement donnée au produit de deux nombres) :

- à partir de la signification de 378×26 comme somme de 26 termes égaux à 378 ;
- à partir de la signification de 378×26 comme exprimant le nombre de carreaux d'un rectangle quadrillé de 278 carreaux sur 26 carreaux.

2. Difficultés rencontrées par les élèves

Plusieurs types de difficultés peuvent être identifiées :

- difficultés dues au fait que tous les résultats de la table ne sont pas parfaitement mémorisés ;
- difficultés dans la gestion des « retenues » ;
- difficultés dans l'ordre des calculs à effectuer ;
- difficultés de « décalage » qui correspondent en fait à l'existence d'un « 0 » par exemple comme chiffre des dizaines (cas de la multiplication par 408).

VI. Apprentissage de la technique opératoire de la division euclidienne

1. Difficultés spécifiques de la technique usuelle

Trois points expliquent que cette technique soit particulièrement difficile pour les élèves.

- 1) Cette technique exige d'effectuer simultanément des divisions (recherche de chaque chiffre du quotient), des multiplications (produit du diviseur par chaque chiffre du quotient) et des soustractions, si on ne pose pas les soustractions partielles. Des opérations sont effectuées successivement si on pose les soustractions partielles. Elle nécessite donc une bonne aisance en calcul mental, une parfaite connaissance des tables et le maintien en mémoire de nombreux résultats partiels.
- 2) Si on ne pose pas les soustractions partielles, celles-ci peuvent faire intervenir des retenues supérieures à 1, ce qui est inhabituel pour les élèves. Pour ces deux raisons, il n'y a donc que des inconvénients à refuser la pose des soustractions partielles.

Avec les soustractions partielles posées

$$\begin{array}{r}
 7518 \overline{) 29} \\
 \underline{- 58} \\
 171 \\
 \underline{- 145} \\
 268 \\
 \underline{- 261} \\
 7
 \end{array}$$

Sans les soustractions partielles posées

$$\begin{array}{r}
 7518 \overline{) 29} \\
 171 \overline{) 259} \\
 268 \\
 7
 \end{array}$$

- 3) Les chiffres écrits successivement pour constituer le quotient sont le résultat d'une approximation (« en... combien de fois ... ») qui peut conduire à essayer un chiffre erroné, donc provisoire. La division est la seule opération dans laquelle un chiffre « calculé » peut ne pas être définitif.

2. Construction de la technique avec les élèves (exemple de progression)

Il s'agit d'améliorer progressivement la technique par soustractions successives en ayant en tête qu'on veut arriver d'une part à ôter des multiples du diviseur du type $10^n \times \text{diviseur}$ et, d'autre part, à faire en sorte qu'à chaque étape ces multiples soient les plus grands possibles.

- 1) On peut commencer par une situation de regroupement (« Combien de paquets ? ») avec un quotient à un chiffre qui permettra de faire un travail sur les multiples.

Exemple : 171 bonbons - combien de paquets de 25 bonbons ?

- 2) On peut continuer par une situation de partage (« Combien dans chaque paquet ? ») avec un quotient à un chiffre qui permettra, elle aussi, de faire un travail sur les multiples.

Exemple : 213 bonbons - 25 enfants – combien chacun ?

- 3) On peut continuer par un problème de partage avec un dividende à plusieurs chiffres et un diviseur à 1 chiffre qui permettra d'aller vers notre technique traditionnelle

Exemple : 1 621 bonbons à répartir entre 5 enfants.

Cette technique repose sur la méthode des soustractions successives optimisée (on distribue uniquement des milliers, des centaines et des dizaines et on essaie d'en distribuer le maximum à chacun à chaque fois).

On peut envisager les étapes suivantes :

On travaille d'abord sur l'ordre de grandeur : $5 \times 100 < 1\,621 < 5 \times 1\,000$ donc le quotient aura trois chiffres : ...

- Première étape

	1 6 2 1	
-	5 0 0	5×100
	1 1 2 1	
-	5 0 0	5×100
	6 2 1	
-	5 0 0	5×100
	1 2 1	
-	5 0	5×10
	7 1	
-	5 0	5×10
	2 1	
-	5	5×1
	1 6	
-	5	5×1
	1 1	
-	5	5×1
	6	
-	5	5×1
	1	

quotient : 324
reste : 1

- Deuxième étape

Il s'agit d'arriver à trouver d'un coup combien on peut distribuer de centaines, puis de dizaines puis d'unités.

On peut axer le travail sur le calcul mental (ce qui demande une connaissance des tables de multiplication) mais on peut aussi éventuellement, dans un premier temps, donner un (ou plusieurs) répertoire(s) de multiples (de 5 dans l'exemple). On peut aussi ne pas donner de répertoire(s) mais amener l'élève à en construire.

Répertoires :

$$\begin{array}{lll} 5 \times 1 = 5 & 5 \times 2 = 10 & 5 \times 3 = 15 \text{ etc.} \\ 5 \times 10 = 50 & 5 \times 20 = 100 & 5 \times 30 = 150 \text{ etc.} \\ 5 \times 100 = 500 & 5 \times 200 = 1\,000 & 5 \times 300 = 1\,500 \text{ etc.} \end{array}$$

Il s'agit d'arriver à :

$$\begin{array}{r} 1621 \\ - 1500 \\ \hline 121 \\ - 100 \\ \hline 21 \\ - 20 \\ \hline 1 \\ \text{quotient : } 324 \\ \text{reste : } 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \times 300 \\ 5 \times 20 \\ 5 \times 4 \end{array}$$

- Troisième étape

Il ne s'agit plus que d'une question de présentation des calculs (« on n'a pas besoin d'écrire 5 tout le temps ; pour se souvenir que c'est 5, on le met dans un coin »)

On peut passer par :

$$\begin{array}{r} 1621 \\ - 1500 \\ \hline 121 \\ - 100 \\ \hline 21 \\ - 20 \\ \hline 1 \\ \text{quotient : } 324 \\ \text{reste : } 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & \\ \hline 300 & \\ 20 & \\ 4 & \end{array}$$

Pour arriver à :

$$\begin{array}{r|l}
 1621 & 5 \\
 \hline
 -1500 & 324 \\
 \hline
 121 & \\
 -100 & \\
 \hline
 21 & \\
 -20 & \\
 \hline
 1 &
 \end{array}$$

- 4) Il reste à voir la technique pour les divisions avec deux chiffres au diviseur. Dans ce cas la connaissance des tables de multiplication ne suffit pas. On peut dans un premier temps faire construire systématiquement un répertoire (table de multiples du diviseur). On peut aussi travailler par tâtonnement sans construction systématique a priori du répertoire.

$$\begin{array}{r|l}
 6713 & 21 \\
 \hline
 -6300 & 319 \\
 \hline
 -413 & \\
 -210 & \\
 \hline
 203 & \\
 -189 & \\
 \hline
 14 &
 \end{array}$$

$21 \times 1 = 21$
$21 \times 2 = 42$
$21 \times 3 = 63$
$21 \times 4 = 84$
$21 \times 5 = 105$
$21 \times 6 = 126$
$21 \times 7 = 147$
$21 \times 8 = 168$
$21 \times 9 = 189$