EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES D'EQUATIONS

I. Résoudre un problème par une mise en équation

La mise en équation d'un problème comporte, en général, 4 étapes :

1. Choisir les inconnues

   La lecture de la question suffit souvent à dégager une inconnue, mais parfois il peut être intéressant de choisir une autre inconnue que celle suggérée par la question.

   Il faut également déterminer, en fonction de la situation, à quel domaine numérique doit (ou doivent) appartenir la (ou les) inconnue(s).

2. Traduire les informations fournies par des égalités ou des inégalités où figurent les inconnues (on obtient ainsi ce qu'on appelle des équations ou des inéquations).

3. Résoudre l'équation ou l'inéquation ou le système d'équations et/ou d'inéquations en utilisant les calculs et méthodes possibles.

4. Retraduire les résultats obtenus dans le langage de la situation et éventuellement vérifier la pertinence des réponses obtenues (par un calcul exact ou approché,... ou simplement par le bon sens).

II. Equations du premier degré à une inconnue

Il s'agit d'équations qui peuvent être mises sous la forme $ax = b$, ou qui peuvent s'y ramener.

Si $a \neq 0$, l'équation ne possède qu'une seule solution : $x = \frac{b}{a}$.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution.
Si $a = 0$ et $b = 0$, tout nombre réel est solution de l'équation.

Deux règles fondamentales peuvent être utilisées pour ramener une équation à la forme précédente.

Règle 1 : On obtient une équation équivalente[1] à une équation donnée en ajoutant (ou en retranchant) aux deux membres de cette dernière une même expression algébrique.

Règle 2 : On obtient une équation équivalente à une équation donnée en multipliant (ou en divisant) ses deux membres par une même expression algébrique non nulle.

[1] Une équation est équivalente à une autre si elles possèdent toutes deux exactement les mêmes solutions.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

- Exemple 1 : $3(3+x) = 6 - x$

  Résolvons cette équation en utilisant une suite d'équations équivalentes.

  (1) $9 + 3x = 6 - x$ développement du 1er membre (distributivité de la multiplication sur l'addition)

  (2) $9 + 4x = 6$ addition de x aux deux membres de (1)

  (3) $4x = -3$ soustraction de 9 (ou ajout de -9) aux deux membres de (2)

  (4) $x = -\frac{3}{4}$ division des deux membres par 4

  L'équation de départ a donc pour solution $-\frac{3}{4}$.

- Exemple 2 (équation produit) : $(5x - 10)(2x + 4) = 0$

  On sait que, dans R, un produit est nul dès lors que l'un des facteurs au moins est nul.

  L'équation donnée est donc équivalente à : $5x - 10 = 0$ ou $2x + 4 = 0$.

  L'équation de départ a donc deux solutions qui sont : 2 et -2.

- Exemple 3 (équation quotient) : $\frac{8-4x}{2x+7} = 3$

  Résolvons cette équation en utilisant une suite d'équations équivalentes.

  Il faut d'abord que $2x + 7$ ne soit pas nul.

  $2x + 7 \neq 0$ équivaut à $2x \neq -7$ (ajout de -7 aux deux membres) et à $x \neq -\frac{2}{7}$

  Sous cette condition, l'équation de départ est équivalente à :

  (1) $8 - 4x = 3(2x + 7)$ règle 2 applicable car $2x + 7 \neq 0$

  (2) $8 - 4x = 6x + 21$ calcul

  (3) $-10x = 13$ règle 1

  (4) $x = -\frac{10}{13}$ règle 2

  L'équation de départ a donc pour solution $-\frac{10}{13}$ (car $-\frac{10}{13} \neq -\frac{2}{7}$).

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

III. Inéquations du premier degré à une inconnue

Il s'agit d'équations qui peuvent être mises sous la forme $ax < b$.

Trois règles fondamentales peuvent être utilisées pour ramener une équation à la forme précédente.

Règle 3 : On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en ajoutant (ou en retranchant) aux deux membres de cette dernière une même expression algébrique.

Règle 4 : On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en multipliant (ou en divisant) ses deux membres par une même expression algébrique strictement positive.

Règle 5 : On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en multipliant (ou en divisant) ses deux membres par une même expression algébrique strictement négative, à condition de changer le sens de l'inégalité.

- Exemple : $2x - 5 < 4x + 3$

  Résolvons cette inéquation en utilisant une suite d'inéquations équivalentes.

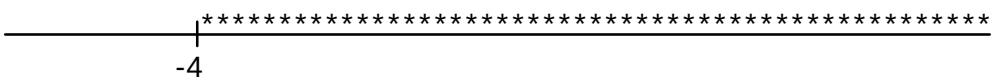
  (1) $2x - 5 - 4x - 3 < 0$ règle 1

  (2) $-2x - 8 < 0$ calcul

  (3) $-2x < 8$ règle 3 (ajout de 8 aux deux termes)

  (4) $x > -4$ règle 5 (les deux membres ont été divisés par -2 donc changement du sens de l'inégalité)

  Tous les réels supérieurs strictement à -4 sont solutions de l'inéquation initiale (une inéquation admet souvent une infinité de solutions) ; ces solutions qui appartiennent à l'intervalle $]-4; +\infty[$ peuvent être représentées sur la droite numérique (partie marquée ***) :



IV. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Il s'agit d'équations qui peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

Pour des valeurs données de a, b, c, a', b', c' on cherche les couples (x, y) qui sont simultanément solutions des deux équations. Les règles déjà évoquées pour les équations peuvent bien entendu être utilisées pour les systèmes. Deux méthodes sont proposées ici pour résoudre de tels systèmes.

1. Résolution par substitution

Cette méthode est fondée sur la règle suivante :

On obtient un système équivalent[2] à un système donné en substituant à une inconnue, dans l'une des équations, sa valeur tirée de l'autre équation (valeur exprimée en fonction de la deuxième inconnue).

- Exemple : $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x + 3y = -4 \end{cases}$

Résolvons ce système en écrivant des systèmes équivalents :

(1) $\begin{cases} y = 4 - 3x \\ x + 3y = -4 \end{cases}$ ajout de $-3x$ aux deux membres de la première équation

(2) $\begin{cases} y = 4 - 3x \\ x + 3(4 - 3x) = -4 \end{cases}$ substitution de y par son expression en fonction de x

(3) $\begin{cases} y = 4 - 3x \\ -8x + 12 = -4 \end{cases}$ substitution de y par son expression en fonction de x

(4) $\begin{cases} y = 4 - 3x \\ x = 2 \end{cases}$ résolution de la 2ème équation

(5) $\begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ remplacement de x par sa valeur dans la 1ère équation

Le système a donc pour solution le couple (2 ; -2). Par convention, le premier terme du couple (ici 2) correspond à la valeur de x et le deuxième (ici -2) à la valeur de y.

[2] Un système est équivalent il un autre s'il possède exactement les mêmes solutions.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

2. Résolution par combinaison

Cette méthode est fondée sur la règle suivante :

On obtient un système équivalent à un système donné en remplaçant l'une des équations par une combinaison linéaire des deux équations du système.

- Exemple : $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$

Résolvons ce système en écrivant des systèmes équivalents :

(1) $\begin{cases} 6x + 9y = 24 \\ 6x - 8y = -10 \end{cases}$ multiplication des deux membres par 3 ; multiplication des deux membres par 2

(2) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 17y = 34 \end{cases}$ obtenue en soustrayant membre à membre la $2^{ème}$ équation de la $1^{ère}$

(3) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ y = 2 \end{cases}$ résolution de la $2^{ème}$ équation

(4) $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ résolution de la $1^{ère}$ équation après avoir remplacé y par sa valeur

Le système a donc pour solution le couple (1 ; 2).

On aurait pu procéder en multipliant les deux membres de la $1^{ère}$ équation par -3 puis en ajoutant membre à membre les deux équations.

Ces deux méthodes sont généralisables à la résolution de systèmes de 3 équations à 3 inconnues, ...

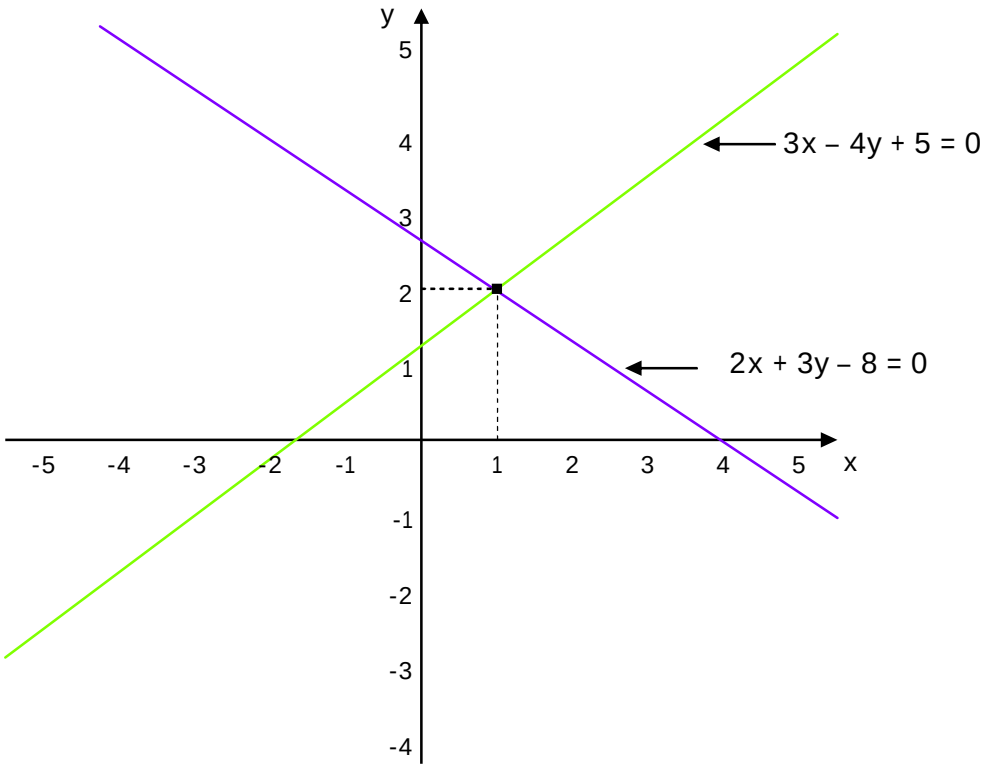
3. Résolution par une méthode graphique

Une troisième méthode, graphique, peut également être utilisée. Elle consiste à tracer, dans un repère, les deux droites qui ont pour équation chacune des deux équations données. Les coordonnées du point d'intersection des deux droites (s'il existe) fournissent le couple solution.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

- Exemple : $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$

  Cette méthode graphique ne permet généralement que d'obtenir une valeur approchée des solutions ; si on souhaite des valeurs exactes, il faut utiliser une méthode algébrique.



V. Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

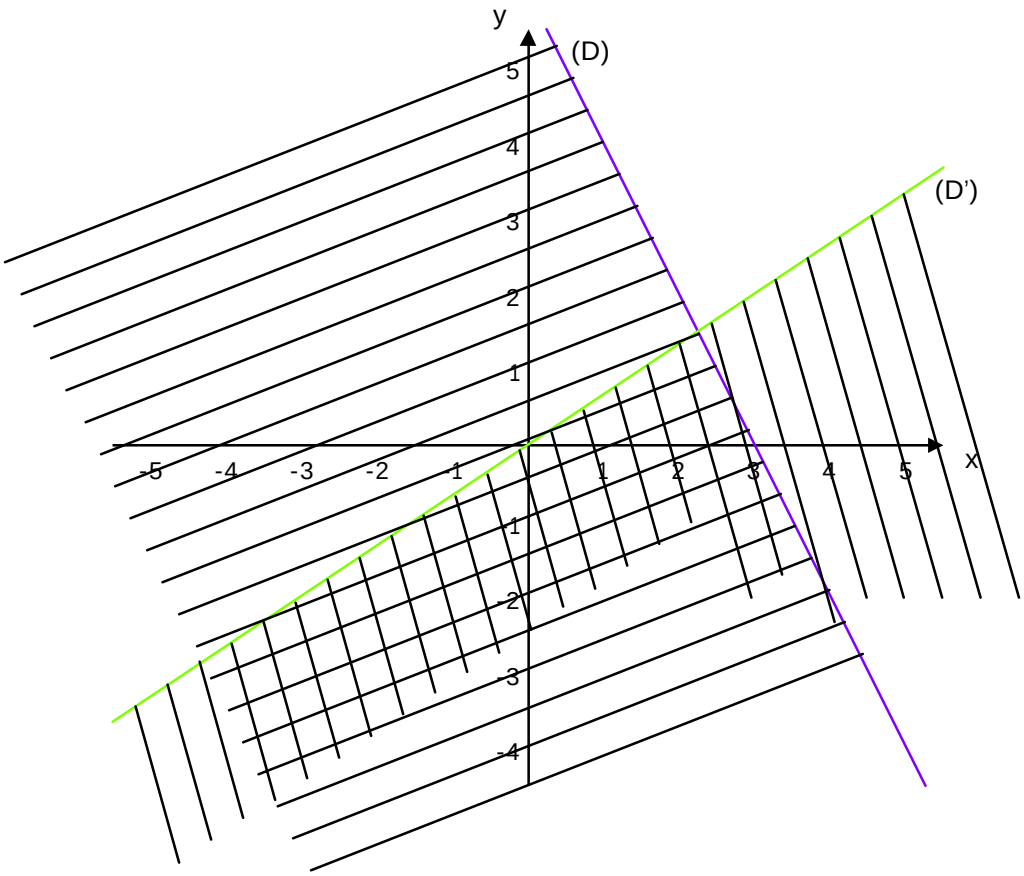
On utilisera ici une méthode graphique qui permet de visualiser facilement tous les couples solutions.

- Exemple : $\begin{cases} 2x + y < 6 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases}$

  équivalent à $\begin{cases} 2x + y - 6 < 0 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases}$

  Cette méthode consiste d'abord à tracer dans un repère les deux droites d'équation : $2x + y - 6 = 0$ (D) et $2x - 3y = 0$ (D').

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux



La méthode est fondée sur la règle suivante (énoncée sur l'exemple de la droite (D)) :

Tous les couples (x ; y) correspondant à des points situés dans un même demi-plan par rapport à la droite (D) donnent une valeur de même signe à l'expression 2x + y- 6. L'expression prend le signe contraire pour tous les points de l'autre demi-plan.

Il suffit donc d'avoir le signe de l'expression pour l'un des points du plan pour connaître ce signe pour tous les points du plan.

Ainsi pour (0 ; 0), on a 2x + y – 6 = -6 qui est négatif ; donc pour tout le demi-plan déterminé par (D) contenant l'origine, l'expression 2x + y - 6 prend des valeurs négatives, et des valeurs positives dans l'autre demi-plan.

Ainsi pour (1 ; 0), on a 2x – 3y = 2 qui est positif ; donc pour tout le demi-plan déterminé par (D') contenant le point de coordonnées (1 ; 0), l'expression 2x – 3y prend des valeurs positives et des valeurs négatives dans l'autre demi-plan.

Il suffit de hachurer le demi-plan convenable pour chaque inéquation ; la région hachurée deux fois correspond aux couples solutions du système proposé.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux