ELEMENTS D'ARITHMETIQUE DANS L'ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

I. Multiples et diviseurs

1. Multiples d'un nombre entier naturel

- Définition

Un nombre entier naturel a est multiple d'un nombre entier naturel b s'il existe un nombre entier k tel que a = b x k.

Exemple :

Les nombres 6, 12, 42, 60, 330 sont des multiples de 6. Ils peuvent s'écrire 6 x 1, 6 x 2, 6 x 7, 6 x 10, 6 x 55.

L'ensemble des multiples de 6 est l'ensemble : {0, 6, 12, 18, 24, 30,...}.

- Remarques
  - Tout naturel n est multiple de 1 : n = 1 x n.
  - Tout naturel n est multiple de lui-même : n = n x 1.
  - 0 est multiple de tout naturel n : 0 = n x 0.

- Théorèmes

Si les naturels a et b sont multiples de c, alors a + b est aussi multiple de c.

Exemple : 15 et 10 sont multiples de 5 donc leur somme 25 est multiple de 5.

Si a est multiple de b et si b est multiple de c, alors a est multiple de c.

Exemple : 75 est multiple de 25 qui est multiple de 5 donc 75 est multiple de 5.

2. Diviseurs d'un nombre entier naturel

- Définition

Un nombre entier a est divisible par un nombre entier b non nul s'il existe un nombre entier q tel que a = b x q.

Exemple :

Les nombres 4, 9, 18 sont des diviseurs de 72. On dit également que 72 est un multiple de 4, de 9 et de 18.

L'ensemble des diviseurs de 72 est l'ensemble : {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36}.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

- Formulations possibles

- a est divisible par b	21 est divisible par 7 et 3.
- b divise a	3 divise 21 et 7 divise 21.
- a est un multiple de b	21 est multiple de 3 et multiple de 7.
– b est un diviseur de a	3 et 7 sont des diviseurs de 21.

- Remarques
  - Tout naturel est diviseur de 0.
  - Tout naturel est diviseur de lui-même.
  - 1 est diviseur de tout naturel.

- Théorèmes

Si le naturel c est un diviseur des naturels a et b, alors il est aussi diviseur de a + b

Si a est diviseur de b et si b est diviseur de c, alors a est diviseur de c.

II. Critères de divisibilité[1]

1. Divisibilité par 2

Un nombre entier est divisible par 2 (ou pair) si et seulement si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemples :

258 est divisible par 2.

123 n'est pas divisible par 2.

2. Divisibilité par 3

Un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la « somme de ses chiffres » est divisible par 3.

Exemple :

135 est divisible par 3 car 1 + 3 + 5 = 9.

121 est n'est pas divisible par 3 car 1 + 2 + 1 = 4.

[1] Ces critères de divisibilité concernent les nombres écrits en base 10.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

3. Divisibilité par 4

Un nombre entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Exemples :

1 536 est divisible par 4 car 36 = 4 x 9.

814 n'est pas divisible par 4 car 14 n'est pas divisible par 4.

4. Divisibilité par 5

Un nombre entier est divisible par 5 si et seulement si le chiffre des unités est 0 ou 5.

Exemples :

875 est divisible par 5.

354 n'est pas divisible par 5.

5. Divisibilité par 9

Un nombre entier est divisible par 9 si et seulement si la « somme de ses chiffres » est divisible par 9.

Exemples :

477 est divisible par 9 car 4 + 7 + 7 = 18.

439 n'est pas divisible par 9 car 4 + 3 + 9 = 16.

6. Divisibilité par 10

Un nombre entier est divisible par 10 si et seulement si le chiffre des unités est 0.

Exemples :

480 est divisible par 10.

409 n'est pas divisible par 10.

7. Divisibilité par 25

Un nombre entier est divisible par 25 si et seulement si ses deux derniers chiffres sont 00, 25, 50 ou 75.

Exemples :

850 est divisible par 25.

415 n'est pas divisible par 25.

III. Parité et imparité des entiers naturels

1. Nombres pairs

Un nombre entier naturel n est pair s'il vérifie une des propriétés suivantes :

- le chiffre des unités de n est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- le reste de la division euclidienne de n par 2 est égal à 0, c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier naturel k tel que n = 2 x k.

2. Nombres impairs

Un nombre entier naturel m est impair s'il vérifie une des propriétés suivantes :

- le chiffre des unités de m est 1, 3, 5, 7 ou 9 ;
- le reste de la division euclidienne de m par 2 est égal à 1, c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier naturel l tel que m = 2 x l + 1.

3. Parité de la somme ou du produit de deux nombres entiers

	Somme a + b	Produit a x b
a et b sont pairs	paire	pair
a et b sont impairs	paire	impair
a est pair ; b est impair	impaire	pair

IV. Nombres premiers

1. Définition

Un nombre entier est premier s'il a exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemple :

Les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 sont les nombres premiers inférieurs à 40.

2. Remarques

- Il y a une infinité de nombres premiers. Il n'existe aucune règle connue permettant de définir leur répartition dans l'ensemble V.
- 2 est le seul nombre premier pair, puisque tout autre nombre pair dispose d'au moins trois diviseurs, à savoir 1, 2 et le nombre lui-même...

- 1 n'est pas un nombre premier. Il n'a en effet qu'un seul diviseur : lui-même.
- 0 n'est pas un nombre premier car il a une infinité de diviseurs.

3. Entiers naturels premiers inférieurs à 100

1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	$\boxed{7}$	8	9	10
$\boxed{11}$	12	$\boxed{13}$	14	15	16	$\boxed{17}$	18	$\boxed{19}$	20
21	22	$\boxed{23}$	24	25	26	27	28	$\boxed{29}$	30
$\boxed{31}$	32	33	34	35	36	$\boxed{37}$	38	39	40
$\boxed{41}$	42	$\boxed{43}$	44	45	46	$\boxed{47}$	48	49	50
51	52	$\boxed{53}$	54	55	56	57	58	$\boxed{59}$	60
$\boxed{61}$	62	63	64	65	66	$\boxed{67}$	68	69	70
$\boxed{71}$	72	$\boxed{73}$	74	75	76	77	78	$\boxed{79}$	80
81	82	$\boxed{83}$	84	85	86	87	88	$\boxed{89}$	90
91	92	93	94	95	96	$\boxed{97}$	99	99	100

4. Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers

- Propriété

Tout nombre entier se décompose en un produit unique de facteurs premiers.

Exemple :

5 x 4 n'est pas la décomposition en facteurs premiers du nombre 20 car 4 n'est pas un nombre premier.

2 x 2 x 5 (ou $2^2 \times 5$) est la décomposition en facteurs premiers de 20, elle est unique.

- Première méthode

Décomposer en facteurs premiers le nombre 36.

On sait que 36 = 4 x 9 = 2 x 2 x 3 x 3. On peut écrire $36 = 2^2 \times 3^2$.

- Deuxième méthode

Une méthode systématique pour obtenir la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers consiste à essayer de diviser successivement le nombre proposé par les nombres premiers successifs.

Exemple :

Décomposer en facteurs premiers le nombre 728.

728	2
364	2
182	2
91	7
13	13
1	

Donc $728 = 2^3 \times 7 \times 13$

- Diviseurs d'un nombre entier

  Cette décomposition en facteurs premiers permet de trouver tous les diviseurs d'un nombre entier.

  Exemple :

  $36 = 2^2 \times 3^2$.

  On peut établir la liste complète des diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 2 x 2, 2 x 3, 3 x 3, 2 x 2 x 3, 2 x 3 x 3 et 2 x 2 x 3 x 3.

  L'ensemble des diviseurs de 36 est : {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}.

- Nombre de diviseurs d'un nombre entier

  Pour $n = a^{a} b^{b}$, le nombre de diviseurs est égal à $(\alpha + 1) \times (\beta + 1)$.

  Exemple :

  $36 = 2^2 \times 3^2$.

  Le nombre de diviseurs de 36 est égal à $(2 + 1) \times (2 + 1) = 3 \times 3 = 9$.

V. Diviseurs communs et PGCD

1. Définition

Soit deux nombres entiers naturels non nuls a et b. Chacun de ces deux entiers possède un certain nombre de diviseurs.

Certains de ces diviseurs peuvent être communs à a et à b, c'est-à-dire qu'ils divisent à la fois a et b.

On peut noter que a et b ont au moins 1 comme diviseur commun, puisque 1 divise tous les nombres.

> Le plus grand des diviseurs communs à a et à b s'appelle le PGCD ou Plus Grand Commun Diviseur de a et de b. On le note PGCD (a ; b).

2. <u>Calcul du PGCD de deux nombres entiers a et b</u>

- Première méthode

  Cette méthode utilise les <u>décompositions en facteurs premiers</u>.

  On décompose d'abord a et b en facteurs premiers.

  Leur PGCD est alors le produit de chacun des facteurs premiers communs à a et à b, élevés à la plus faible des deux puissances rencontrées dans les décompositions de a et de b.

  Exemple :

  $$\left.\begin{array}{l} 868 = 2^2 \times 7 \times 31 \\ 1\,274 = 2 \times 7^2 \times 13 \end{array}\right\} \text{PGCD } (868 \,;\, 1\,274) = 2 \times 7 = 14$$

- Deuxième méthode

  Cette méthode repose sur le fait que si un nombre entier est un diviseur de deux nombres entiers a et de b, alors il est aussi un diviseur de leur différence.

  Si a > b, on peut écrire que PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a - b).

  Si les nombres b et a - b sont égaux, alors ils sont aussi égaux à leur PGCD.

  Si les deux nombres sont différents, on peut à nouveau calculer la différence entre le plus grand et le plus petit des deux, et écrire que le PGCD est égal au PGCD de cette différence et du plus petit des deux termes, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne deux nombres égaux : on a alors le PGCD de a et de b.

  Exemple :

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (868 ; 406)

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (868 ; 406) = PGCD (406 ; 462)

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (406 ; 462) = PGCD (406 ; 56)

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (350 ; 56) = PGCD (294 ; 56)

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (238 ; 56) = PGCD (186 ; 56)

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (126 ; 56) = PGCD (70 ; 56)

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (70 ; 56) = PGCD (14 ; 56) = PGCD (14 ; 42)

  PGCD (1 274 ; 868) = PGCD (14 ; 28) = PGCD (14 ; 14) = 14

  Donc PGCD (1 274 ; 868) = 14

- Troisième méthode : « algorithme d'Euclide »

  Cette méthode consiste à effectuer une succession de <u>divisions</u>.

  Pour obtenir le PGCD de a et b, on divise a par b, puis b par le reste de la première division, puis ce reste par le reste de la seconde division, ... Après un certain nombre de divisions, on arrive à un reste nul. Le reste précédent est le PGCD.

  Exemple :

Division	Quotient	Reste
1 274 par 868	1	406
868 par 406	2	56
406 par 56	7	14
56 par 14	4	0

Donc PGCD (1 274 ; 868) = 14.

3. <u>Nombres premiers entre eux</u>

- Deux nombres entiers naturels non nuls a et b sont dits premiers eux si leur PGCD est égal à 1, c'est-à-dire s'ils ne possèdent que 1 pour diviseur commun.

- <u>Propriété</u> : si deux nombres entiers naturels non nuls a et b sont des diviseurs d'un autre nombre entier naturel n et si, par ailleurs, a et b sont premiers entre eux, alors le produit a x b est aussi un diviseur de n.

- <u>Théorème de Gauss</u> : soit a, b et k, trois nombres entiers naturels non nuls. Si k divise le produit a x b et si k est premier avec a, alors k divise b.

4. <u>Utilisation du PGCD de deux nombres entiers naturels</u>

- Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à deux nombres

  Etant donnés deux nombres entiers naturels a et b, l'ensemble des diviseurs communs à a et à b n'est autre que l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

  Ainsi, on commence par calculer leur PGCD, puis on cherche les diviseurs de celui-ci. On a alors l'ensemble de tous les diviseurs communs aux deux nombres.

  Exemple :

  PGCD (1 274 ; 868) = 14. L'ensemble des diviseurs communs à 1 274 et 868 est {1 ; 2 ; 7 ; 14}

- Rendre une fraction irréductible

  Soit le nombre rationnel r dont on suppose connue une écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$.

  Pour trouver la fraction irréductible qui représente r, il faut essayer de simplifier la fraction $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre de manière à ce que le numérateur et le dénominateur de la fraction simplifiée soient premiers entre eux.

  Il suffit de diviser a et b par leur PGCD.

  Exemple :

  $r = \frac{1274}{868}$

  PGCD (1 274 ; 868) = 14

  $r = \frac{1274}{868} = \frac{91 \times 14}{62 \times 14} = \frac{91}{62}$

VI. Multiples communs et PPCM

1. Définition

Soit deux nombres entiers naturels non nuls a et b.

Alors a et b possèdent une infinité de multiples communs, c'est-à-dire des nombre qui sont à la fois multiples de a et multiples de b. En effet, le produit a x b est l'un de ces multiples communs. Les nombres 2 x a x b, 3 x a x b, 4 x a x b, 5 x a x b,… sont eux aussi des multiples communs à a et à b.

Parmi tous les multiples communs à a et à b, le plus petit est appelé le Plus Petit Commun Multiple de a et de b. On le note PPCM (a ; b).

Exemple :

Ensemble des multiples de 24 : {24, 48, 72, 96, 120, 144, 192, …}

Ensemble des multiples de 36 : {36, 72, 108, 144, 180, …}

L'ensemble des multiples communs à 24 et 36 est {72 ; 144 ; …}

PPCM (24 ; 36) = 72

2. Calcul du PPCM de deux nombres entiers a et b

Soit deux nombres entiers naturels non nuls a et b et leurs décompositions en facteurs premiers. Le PPCM de a et de b est alors obtenu en faisant le produit de tous les facteurs premiers rencontrés dans les deux décompositions, élevés à la plus forte puissance pour ceux qui apparaissent simultanément dans les deux décompositions.

Exemple :

$$\left.\begin{array}{l} 868 = 2^2 \times 7 \times 31 \\ 1\,274 = 2 \times 7^2 \times 13 \end{array}\right\} \text{PPCM } (868 ; 1\,274) = 2^2 \times 7^2 \times 13 \times 31 = 78\,988$$

3. Propriétés

- Tout multiple de a et de b est un multiple de leur PPCM.

  Donc, si l'entier naturel n est un multiple commun à a et b, alors il existe un entier naturel k tel que :

  $$n = k \times \text{PPCM } (a ; b).$$

- Pour tout couple d'entiers naturels (a ; b), on a l'égalité :

  $$a \times b = \text{PGCD } (a ; b) \times \text{PPCM } (a ; b).$$

4. Utilisation du PPCM pour ramener deux fractions au même dénominateur

Pour comparer deux fractions de dénominateurs différents ou pour calculer la somme ou la différence de deux fractions de dénominateurs différents, il faut les ramener au plus petit dénominateur commun possible.

Ce dénominateur est le PPCM des dénominateurs des deux fractions.

Exemple :

Calcul de $\frac{13}{868} + \frac{17}{1274}$

$$\left.\begin{array}{l} 868 = 2^2 \times 7 \times 31 \\ 1\,274 = 2 \times 7^2 \times 13 \end{array}\right\} \text{PPCM } (868 ; 1\,274) = 2^2 \times 7^2 \times 13 \times 31 = 78\,988$$

Donc

$$\frac{13}{868} + \frac{17}{1274} = \frac{13 \times 7 \times 13}{78988} + \frac{17 \times 2 \times 31}{78988} = \frac{1183 + 1054}{78988} = \frac{2237}{78988}$$