LES TRIANGLES

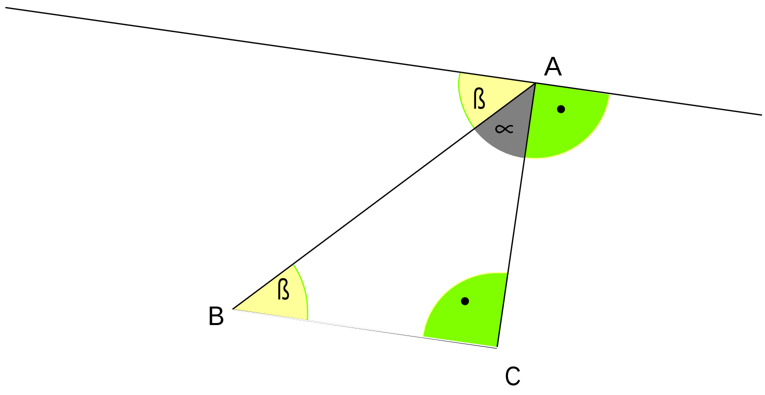
I. Définition

Un triangle est un polygone à trois côtés.

II. Somme des angles d'un triangle

La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.

Démonstration :



On mène la parallèle par A à (BC). Les angles marqués ß sur la figure sont égaux (angles alternes internes) ainsi que les angles marqués •.

Il en résulte que ß + ∝ + • = 180° (angle plat).

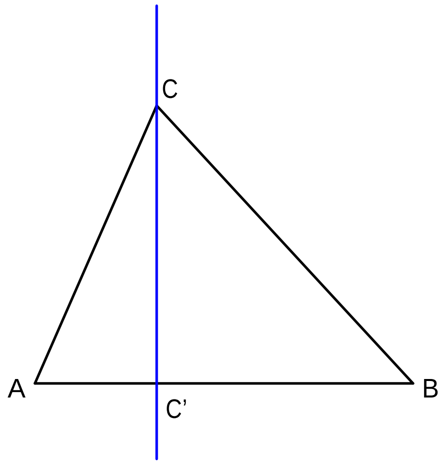
III. Droites particulières du triangle

1. Hauteur

- Définition

Une hauteur d'un triangle est la droite perpendiculaire à un côté qui passe par le sommet opposé.

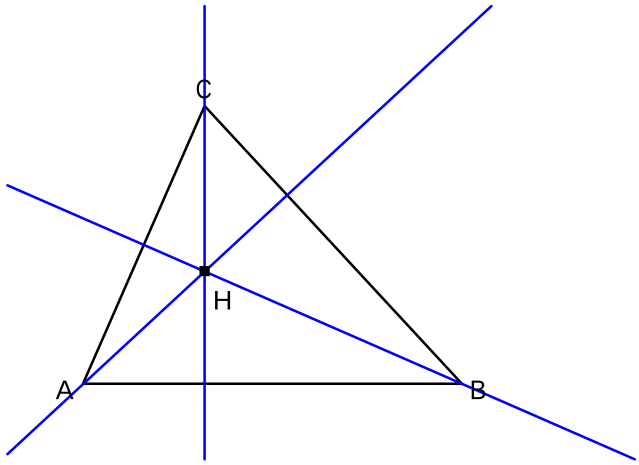
- Tracé



La hauteur issue de C dans le triangle ABC est la perpendiculaire à (BC) passant par A. Le point C' où elle coupe (BC) est le pied de cette hauteur.

- Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point H appelé <u>orthocentre</u> du triangle.



Si le triangle possède trois angles aigus, l'orthocentre est situé à l'intérieur du triangle.

Si le triangle possède un angle obtus, l'orthocentre est à l'extérieur.

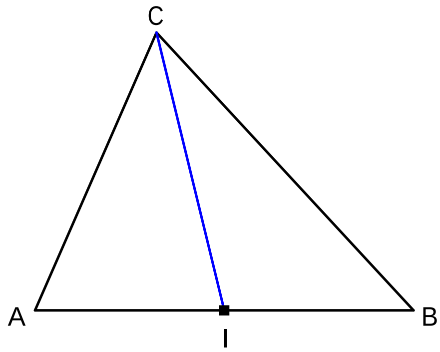
Si le triangle est rectangle, l'orthocentre est confondu avec l'angle droit.

2. <u>Médiane</u>

- Définition

Une médiane d'un triangle est la droite issue d'un sommet coupant le côté opposé en son milieu

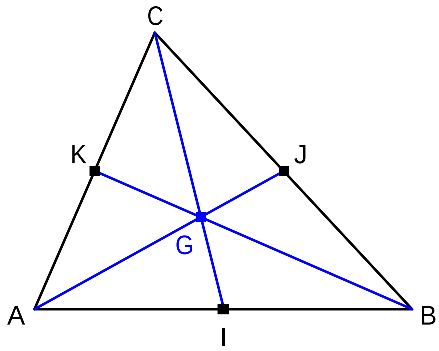
- Tracé



La médiane issue de C dans le triangle ABC est la droite qui joint le sommet C au milieu I du côté opposé [AB].

- Propriétés

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé <u>centre de gravité du triangle</u>, noté G.



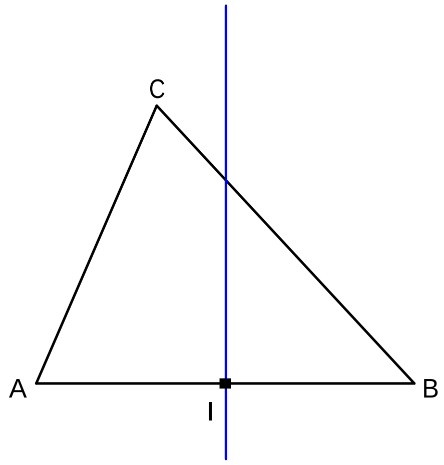
Le centre de gravité d'un triangle est situé 2/3 de chaque médiane à partir du sommet : AG = $\frac{2}{3}$ AJ (GJ = $\frac{1}{3}$ AJ) ; BG = $\frac{2}{3}$ BK ; CG = $\frac{2}{3}$ CI.

3. <u>Médiatrice</u>

- Définition

La médiatrice d’un triangle est la médiatrice d’un de ses côtés.

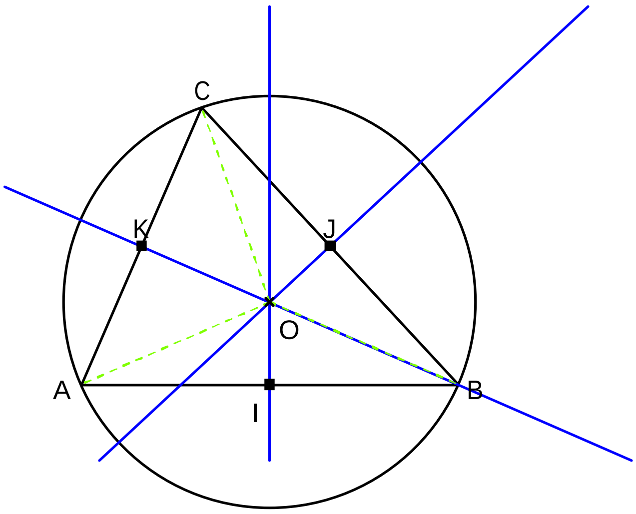
- Tracé



La médiatrice du côté [AB] dans le triangle ABC est la perpendiculaire à (AB) passant par son milieu I.

- Propriété

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O, centre du cercle circonscrit au triangle.



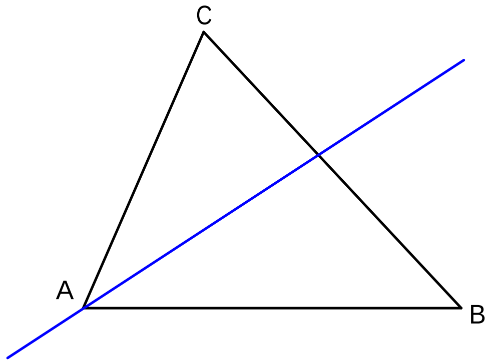
Remarque : O est le centre du cercle circonscrit à ABC signifie que OA = OB = OC.

4. Bissectrice

- Définition

La bissectrice d'un triangle est la bissectrice d'un de ses angles.

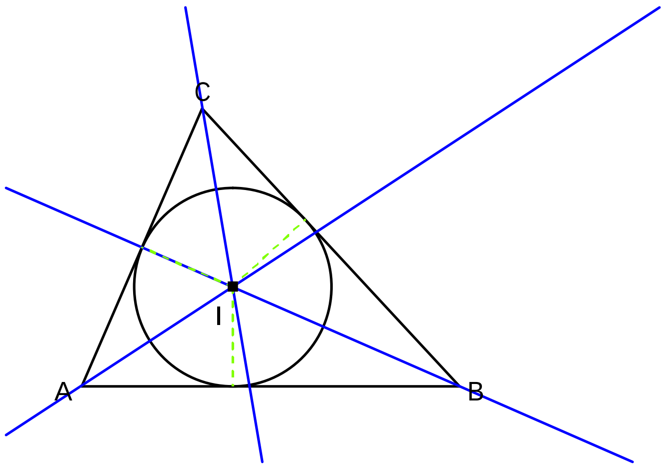
- Tracé



La bissectrice de l'angle Â du triangle ABC est la droite passant par A qui partage l'angle en deux angles de même mesure.

- Propriété

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point I, <u>centre du cercle inscrit</u> au triangle.



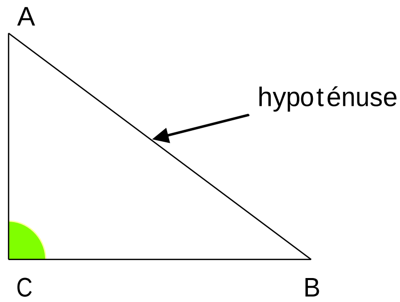
IV. Triangles particuliers

1. <u>Triangle rectangle</u>

- Définition

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse.

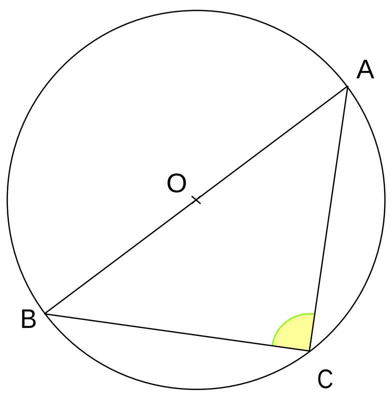
- Tracé



Le triangle ABC est rectangle en C si $\hat{C}$ = 90°. Son hypoténuse est le côté à $\hat{C}$, c'est-à-dire [AB].

- Propriété

Un triangle ABC est rectangle en C si et seulement si le cercle de diamètre [AB] passe par C ou si et seulement si le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [AB].

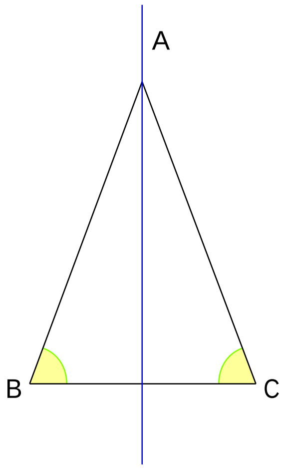


2. <u>Triangle isocèle</u>

- Définition

Un triangle isocèle est un triangle qui possède deux côtés de même longueur (ou isométriques).

- Tracé



Le triangle ABC est isocèle de sommet A si AB = AC.

- Propriétés

  - Le triangle ABC est isocèle de sommet A si et seulement si les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont égaux.
  - Si le triangle ABC est isocèle de sommet A, la hauteur issue de A, la médiane issue de A, la médiatrice de la base [BC] et la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ sont confondues.
  - Inversement, si dans un triangle, deux des quatre droites citées ci-dessus sont confondues alors il est isocèle.

- Triangle rectangle isocèle

Un triangle rectangle isocèle est un triangle rectangle dons les angles à la base valent 45° chacun.

3. Triangle équilatéral

- Définition

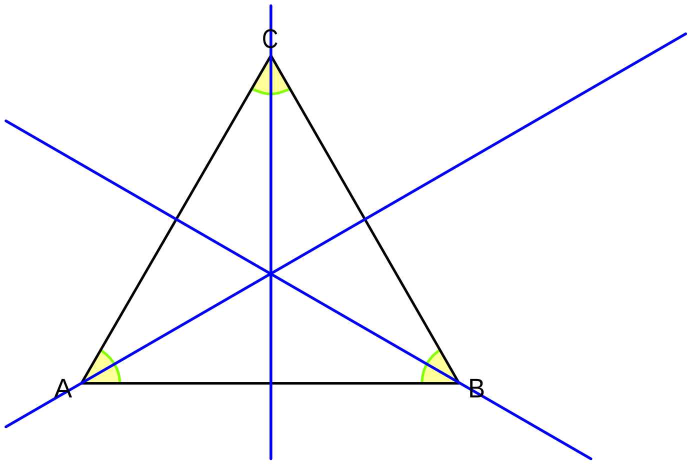
Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont de même longueur.

- Construction

Soit [AB] un segment quelconque. On trace successivement le cercle de centre A et de rayon AB, et le cercle de centre B et de rayon AB. Soit C l'intersection de ces deux cercles.

Le triangle ABC est alors équilatéral : AB = AC = BC.

- Tracé



- Propriété
  - Un triangle est équilatéral si et seulement si ses angles mesurent 60°.
  - Un triangle est équilatéral si et seulement si il est isocèle et a un angle de 60°.
  - Dans un triangle équilatéral les médianes, hauteurs, médiatrices et bissectrices sont confondues. Elles sont concourantes en un point à la fois centre de gravité, orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre du cercle inscrit du triangle ABC.
  - Si dans un triangle, deux des points cités ci-dessus sont confondus, le triangle est équilatéral.

- Construction à la règle non graduée et au compas d'un triangle équilatéral de côté [AB]
  - Tracer l'arc de cercle de centre A et de rayon AB.
  - Tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon AB.
  - Les deux arcs de cercle se coupent en un point C. Le triangle ABC est un triangle équilatéral de côté [AB].