

FONCTIONS NUMÉRIQUES

I. Définitions

1. Fonction

Soit A et B deux ensembles. Une fonction f de A dans B est un procédé qui, à chaque élément x de A, fait correspondre au plus un élément de B.

C'est dire qu'à tout élément x de A, la fonction f associe :

- soit un et un seul élément de B, qu'on note $f(x)$ et qu'on appelle image de x par la fonction f ;
- soit aucun élément de B.

Notation :

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto f(x)$$

f est la fonction de A dans B qui à tout élément x de A associe $f(x)$.

L'ensemble A est appelé ensemble de départ de la fonction f. L'ensemble B est son ensemble d'arrivée.

2. Fonction numérique

On dit qu'une fonction est numérique si son ensemble d'arrivée est une partie de l'ensemble des réels.

II. Aspects d'une fonction

1. Courbes

Une courbe, même sans formule, permet de trouver des renseignements concernant la fonction qu'elle représente. C'est ainsi qu'on peut lire directement les intervalles où la fonction a été croissante, pour quelle valeur de la variable elle a été minimale...

2. Tableaux de valeurs

Exemple :

« Le pouvoir d'achat du franc mesure l'érosion monétaire due à l'inflation. L'intérêt d'un tableau tel que celui présenté (...) est de fournir des séries longues (depuis 1901) permettant de convertir aux prix d'une année donnée (par exemple 2001) une valeur exprimée en francs d'une époque passée. »

1 franc de l'année	1981	1986	1991	1996	2001
Vaut en franc 2001	1,955	1,367	1,167	1,059	1,000
Vaut en euro 2001	0,297 97	0,208 32	0,177 94	0,161 75	0,152 45

De tels tableaux n'apportent que des renseignements ponctuels. On y lit par exemple des valeurs de la fonction v_0 qui exprime la valeur de 1 franc de l'année n en franc de 2001 : $v_0(1986) = 1,367$.

On peut en déduire des valeurs de la fonction qui donne la valeur de 1 franc de 1981 de l'année n : $v_1(n) = \frac{1,955}{v_0(n)}$.

3. Procédés de calcul

Exemples :

- Le tarif d'affranchissement des lettres en service rapide pour la France en 2002 contient des moyens de calcul. Bien qu'en apparence, ce tableau ne contienne que des constantes, il permet des calculs. Ainsi, si l'on veut affranchir une lettre de 215 g, il faudra prévoir 2,13 €.
- Le calcul de l'impôt sur les revenus conduit à choisir dans une liste une formule donnant l'impôt en fonction des deux variables R , revenu imposable, et N , le nombre de parts.

III. Fonctions affines

1. Fonction linéaire

Une fonction f est linéaire s'il existe un nombre réel a tel qu'à tout réel x de A , la fonction f associe ax . Le nombre a est le coefficient de f ; a est aussi le coefficient de x . Le coefficient a est une constante réelle, indépendante de la variable x .

Notation :

$$R \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto ax$$

Ces fonctions sont caractéristiques des suites proportionnelles. A deux suites proportionnelles peut être associée une telle fonction (a étant le coefficient de proportionnalité), et inversement une telle fonction permet de générer des suites proportionnelles.

2. Fonctions affines

Une fonction f est affine s'il existe des nombres réels a et b tels qu'à tout réel x de A , la fonction f associe $ax + b$. Les nombres a et b sont les coefficients de f ; a est le coefficient de x et b le coefficient constant. Les coefficients a et b sont des constantes réelles, indépendantes de la variable x .

Notation :

$$R \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto ax + b$$

Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine : c'est une fonction affine dont le coefficient constant est nul.

3. Fonctions constantes

Une fonction f est constante s'il existe un nombre réel b tel qu'à tout réel x de A la fonction f associe b . Le coefficient constant b est une constante réelle, indépendante de la variable x .

Notation :

$$R \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto b$$

Une fonction constante est aussi un cas particulier de fonction affine : c'est une fonction affine dont le coefficient de x est nul.

4. Fonction puissance

Ce sont les fonctions qui peuvent être décrites par un schéma du type :

$$R \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto a^n$$

La fonction linéaire est aussi un cas particulier d'une telle fonction (cas où $n = 1$).