MULTIPLICATION ET DIVISION DANS N

I. Multiplication dans l'ensemble des entiers naturels

1. Définitions

- Définition à partir de la notion d'ensemble

  Soit deux ensembles A et B, de cardinal fini non nul respectivement égal à a et à b. On constitue le produit cartésien de A et de B, noté A x B.

  Le procédé qui, au couple (a ; b), associe le cardinal de A x B définit une loi de composition interne sur V appelée multiplication sur V.

  On dit que l'on fait le produit de a par b et, par convention, on note a x b le résultat de l'opération. Ce résultat peut être également noté a.b ou ab.

  Exemple :

  Si A possède 7 éléments et B possède 9 éléments, le produit cartésien de A et de B compte 63 éléments. On définit ainsi le produit de 7 et de 9 et on écrit 7 x 9 = 63.

- Définition à partir de l'addition

  Soit deux nombres entiers naturels non nuls a et b.

  Le procédé qui au couple (a ; b) associe la somme b + b + … + b + b, dans laquelle le terme b est répété a fois définit une loi de composition interne sur V.

  Le produit de a par b, que l'on note a x b, est la somme b + b + … + b + b dans laquelle le terme b apparaît a fois.

  Exemple :

  Si a = 7 et b = 9, on sait calculer : 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9. On définit ainsi le produit de 7 et de 9.

  On peut écrire : 7 x 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 63

  L'expression 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 est souvent appelée addition itérée.

- Terminologie

  La multiplication désigne l'opération. Le produit désigne le résultat de la multiplication.

  Les nombres figurant dans l'opération et séparés par le signe multiplié sont les facteurs. Ils sont appelés multiplicande et multiplicateur.

2. Propriétés

- La multiplication dans V est associative : (a x b) x c = a x (b x c).
- Elle est commutative : a x b = b x a
- Elle est distributive par rapport à l'addition :

  a x (b + c) = (a x b) + (a x c)
- Elle est régulière : si c ≠ 0, a x c ≠ b x c, alors a ≠ b
- Elle possède 1 comme élément neutre : a x 1 = 1 x a = a
- Elle possède 0 comme élément absorbant : a x 0 = 0 x a = 0
- Elle est compatible avec la relation d'ordre. Cela signifie que si a, b et c sont trois entiers naturels tels que a ≤ b, alors a x c ≤ b x c.

  Par conséquent, si d est un autre entier naturel et si 0 ≤ a ≤ b et 0 ≤ c ≤ d, alors a x c ≤ b x d[1].
- Sur l'ensemble V, seul le nombre 1 dispose d'un symétrique (lui-même).

3. Technique opératoire

Le calcul du produit de 124 et de 48 est posé de la manière suivante :

	1	2	4
x		4	8

Dans cette présentation en colonnes, 124 est le multiplicande et 48 le multiplicateur.

Pour effectuer le calcul :

- on décompose le multiplicateur en 40 + 8 ;
- puis on effectue séparément les produits 124 x 8 et 124 x 40 ;
- enfin, on ajoute les deux résultats partiels ainsi obtenus.

[1] On dit que l'on peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens.

Cette manière d'effectuer les calculs s'appuie :

- sur les tables de multiplication ;
- sur les connaissances relatives à la numération (décomposition d'un nombre en centaines, dizaines et unités) ;
- sur la distributivité de la multiplication sur l'addition : 124 x (8 + 40) = 124 x 8 + 124 x 40 ;
- sur l'associativité de la multiplication : 124 x 40 = 124 x (4 x 10) = (124 x 4) x 10.

- Calcul du premier produit partiel

  Lorsqu'on effectue le premier produit partiel (124 x 8), on utilise les mêmes propriétés. On multiplie successivement le chiffre des unités de 124, puis celui des dizaines et enfin celui des centaines par 8.

  Le premier produit (4 x 8) donne un résultat égal à 32. Comme pour l'addition, on conserve 2 comme chiffre des unités. Les 30 unités restantes sont groupées en 3 dizaines qui seront ajoutées au résultat du produit du chiffre des dizaines de 124 par 8. Ces 3 dizaines sont appelées <u>retenue</u>.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 4 & 3 & \\ \times & & 4 & 8 & & \\ \hline & & & 2 & & \end{array}$$

  <u>Remarque</u> : la retenue est notée en dehors du calcul afin d'éviter la confusion qui consisterait à l'ajouter au chiffre des dizaines de 124 avant de multiplier ce chiffre par 8.

  Puis, on effectue le produit au rang des dizaines : 8 x 2. On ajoute les trois dizaines de retenue obtenue au rang des unités. On obtient 19 dizaines que l'on décompose en 10 dizaines (soit une centaine de retenue) et 9 dizaines qui donne le chiffre des dizaines du produit 124 x 48.

  Enfin, au rang des centaines, on effectue le produit 8 x 1, auquel on ajoute la centaine retenue provenant du rang des dizaines. Cela donne 9 centaines.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 4 & \cancel{3} & \cancel{1} \\ \times & & 4 & 8 & & \\ \hline & 9 & 9 & 2 & & \end{array}$$

- Calcul du deuxième produit partiel

  On effectue ensuite le deuxième produit partiel : 124 x 40.

  Ce calcul est remplacé par 124 x (4 x 10), lui-même remplacé par (124 x 4) x 10 (associativité de la multiplication).

  Le résultat de (124 x 4) multiplié par 10 est traduit par l'écriture d'un zéro au rang des unités du résultat partiel.

	1	2	4	$\cancel{3}$	$\cancel{1}$
x		4	8		
	9	9	2		
			0		

Remarque : le zéro inscrit au rang des unités est remplacé par un point. On décale le résultat d'un rang vers la gauche. Cela signifie que le nombre obtenu par le produit 124 x 4 est un nombre de dizaines.

On effectue alors le produit 124 x 4.

		1	2	4	$\cancel{3}$	$\cancel{1}$
x			4	8	$\cancel{1}$	
		9	9	2		
+	4	9	6	•		

Il ne reste plus qu'à ajouter les produits partiels.

		1	2	4	$\cancel{3}$	$\cancel{1}$
x			4	8	$\cancel{1}$	
	1	1				
		9	9	2		
+	4	9	6	•		
	5	9	5	2		

II. La division euclidienne

1. Définition

Soit a et b deux entiers naturels avec b ≠ 0, il existe toujours deux entiers naturels uniques q et r tels que :

$$\begin{cases} a = b \times q + r \\ r < b \end{cases}$$

q est le <u>quotient euclidien</u> de a par b. r est le <u>reste</u> de la division euclidienne de a par b.

Le quotient de la division euclidienne de a par b ≠ 0 peut aussi être défini comme l'unique entier q vérifiant b x q £ a < b x (q+ 1).

Effectuer la division euclidienne de a par b consiste donc à encadrer a (appelé <u>dividende</u>) par deux multiples consécutifs de b (appelé <u>diviseur</u>).

2. Technique opératoire

La division euclidienne de 3 752 par 14 est posée de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccc|cc} 3 & 7 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ \cline{5-6} & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

Le dividende est divisé par étapes, en partant du chiffre des milliers pour aller vers celui des unités. Le calcul s'effectue donc de la gauche vers la droite.

- Première étape

  Il n'est pas possible de diviser les 3 milliers de 3 798 par 14 car le quotient est nul.

  On cherche donc le plus grand multiple de 14 inférieur ou égal aux 37 centaines de 3 798. Il faut faire des essais (une fois 14 égale 14, deux fois 14 égale 28, trois fois 14 égale 42). 2 sera le chiffre des centaines du quotient. Le reste partiel est 9 (centaines).

$$\begin{array}{ccccc|cc} & 3 & 7 & 9 & 8 & 1 & 4 \\ \cline{6-7} - & 2 & 8 & & & 2 & \\ \cline{1-3} & & 9 & & & & \end{array}$$

- Deuxième étape

  Les 9 centaines qui restent sont transformées en 90 dizaines, auxquelles s'ajoutent les 9 dizaines de 3 798. En abaissant le 9, on fait apparaître les 99 dizaines à diviser par 14.

  Comme dans la première étape, on cherche le plus grand multiple de 14 inférieur ou égal à 99. On obtient 7. Il y aura donc un 7 comme chiffre des dizaines au quotient et il restera une dizaine comme reste partiel.

	3	7	9	8	1	4	
-	2	8			2	7	
		9	9				
	-	9	8				
			1				

- Troisième étape

  La dizaine est transformée en 10 unités, auxquelles s'ajoutent les 8 unités de 3 798, ce qui donne 18 unités. Enfin, on trouve facilement le chiffre des unités du quotient : 1.

  Le reste final est donc 4 et le quotient 271.

	3	7	9	8	1	4	
-	2	8			2	7	1
		9	9				
	-	9	8				
			1	8			
		-	1	4			
				1			

- Conclusion

  $3\,798 = 14 \times 271 + 4$ et $4 < 14$.