MATHÉMATIQUES
Didactique

TABLE DES MATIERES

DIDACTIQUE

Analyse de production d'élève : Analyse et gestion de l'erreur :

1- repérer l'erreur
2- Déterminer les procédures de l'élève. Mettre en évidence les théorèmes en acte.
    Théorème : ce qui permet d'obtenir un résultat. Théorème en acte : comment il fait.
    Les règles appliquées peuvent être fausses. Ex : ajout des entiers sur parties décimales.
3- Déterminer le domaine de validité de ces théorèmes en acte.
    Ex : règle des zéros si multiplication par 10 valide sur N pas sur D
4- Expliciter les conceptions sous-jacentes
    Prendre de la distance et expliquer le pourquoi. Pourquoi o-t-il fait comme ça ?
    Expliquer les conceptions erronées, les compétences acquises ou non acquises.
    Expliquer les points de difficultés des élèves et d'éventuelles remédiations.
5- Déterminer l'origine de ces conceptions
    D'où viennent les erreurs. Complexité des décimaux. Mauvaise démarche d'approche.

Analyse de manuels :

En terme de cohérence
De difficultés des élèves
De compétences, d'objectifs.

Ne pas se fier qu'à l'auteur : en général : Charnet et Brissiau sont globalement intéressants.

Sur proportionnalité : Brissiau bien alors qu'optimath était moyen.
Sur Décimaux : Charnet semble plus correspondre aux IO que Brissiau.

Souvent programmation par périodes croisées au niveau des thèmes (résolution problèmes, nombres, grandeurs et mesures, décimaux, géométrie…)

Situation-problème : proposer aux enfants une situation qui va leur permettre de développer une compétence nouvelle. Nécessite effort de la part de l'élève.

Conception constructiviste : acquérir la compétence par la recherche : prédominance des situations recherches.
Conception behavioriste : cheminement par petites marches.

NUMERATION : Découverte du nombre : Cycle I

➢La numération parle des signes organisés pour rendre compte d'un nombre. Intervient à partir du cycle 2 => système décimal.
Au cycle 1 : découverte du nombre

IO :
Il faut donner du sens au nombre par son utilisation dans résolution de problèmes articulés avec des jeux. Résolutions en premier par approche perceptive puis élargissement des procédures de résolution (correspondance terme à terme, quantification).
Activités d'anticipation seulement en fin de maternelle. L'écriture des nombres seulement après passage par l'oral.

Cycle I : découverte du monde : compétences relatives aux quantités et aux nombres
Comparer des quantités. Réaliser une collection qui comporte la même quantité d'objets qu'une autre collection.
Résoudre des problèmes sur les quantités (augmentation, diminution, réunion, partage…)
Reconnaître globalement et exprimer des très petites quantités (<3) et des configurations connues (constellations, doigts de la main).
Connaître la comptine numérique jusqu'à 30. Dénombrer en utilisant la suite orale. Associer nombres connus avec écriture chiffrée.

Historique :
➢Il y a 20 ans : prédominance du "autant que". Ex : distribuer autant de billes à chaque élève. 2 raisons :
- influence de la théorie des ensembles : définition du nombre d'après un ensemble.
- influence des travaux de Piaget : "Genèse du nombre chez l'enfant" set de support jusqu'aux années 90. Présent dans IO 95.
L'introduction du nombre ne se faisait qu'après maîtrise de la notion "autant que" (conservation des quantités).
Ces méthodes ne tiennent pas compte des savoirs acquis extra-scolairement.
➢Apport de la psychologie cognitive : Claire Meljac critique le système des années 70. Travaux de Fayd.
Remi Brissiaud "J'apprends les maths".
Nouveau courant : didactique des mathématiques. Pédagogie sur le modèle socio-constructiviste.
ERMEL : Equipe de Recherche en Mathématiques en Ecole eLémentaire.
INRP : Institut National en Recherche Pédagogique.

Principes de Gelman :
➢Résultat des travaux : une des manières de connaître un nombre, c'est compter, dénombrer.
Construction du nombre par mémorisation de la quantité.
➢5 Principes permettent de représenter les difficultés des enfants :
- Correspondance terme à terme entre oral et gestuel. Défaut de synchronisation entre récitation de la comptine et le geste de la main.
- Organisation du comptage. Il faut distinguer les éléments déjà comptés des autres. Le caractère déplaçable intervient.
- Dernier mot énoncé désigne un objet mais aussi la quantité d'objets de la collection (sens ordinal et cardinal).
Difficulté pour accorder statut particulier. L'enfant recompte depuis le début.
- Conservation des quantités. Enfants accordent importance à la disposition spatiale. Il faut multiplier les expériences.
- Variables didactiques. Compétences des enfants varient en fonction des collections homogènes ou hétérogènes : couleur, taille…
➢Remarques sur ces principes :
- Enfant ne parvient pas à coordonner plusieurs activités (pointer et réciter, faire et contrôler). Adulte aide une des tâches (ex pointer).
- Compétences numériques des enfants sont instables. Peut réussir un jour puis se tromper. Contrôle de l'acquisition de la compétence si répétition de la réussite. Si la tâche est trop arbitraire, il y aura échec.
- Grande hétérogénéité des savoirs entre les enfants. Activités de compréhension du nombre lissent ces écarts.

Acquisition de la comptine numérique :
➢Compter : réciter la comptine numérique. Dénombrer : retenir le cardinal des ensembles.
➢Les nombres s'apprennent par groupe de 4. On ne peut demander à l'enfant de se passer de ses doigts avant le CP.
Il faut savoir réciter la comptine dans le sens inverse. Le prédécesseur est plus difficile à retenir que le successeur. L'enfant à du mal à compter jusqu'à un nombre (il le dépasse) et à partir d'un nombre (il recommence au début). 3 moyens :
- Les activités : Activités pour partager : double ou moitié.
Activités pour mémoriser : l'enfant utilise le nombre pour s'en souvenir. Le nombre c'est la mémoire de la quantité. Jeu du voyageur.
Activités pour comparer : relations "plus que", "moins que" au lieu de "beaucoup". Notion du "Autant que". Jeu des boites empilées.
Activités pour anticiper : une quantité peut résulter d'une composition, d'une transformation. Calculs des MS. Etiquettes et dés.
- Les comptines : jouent sur les sonorités. Aspect ludique. Support visuel est possible (un œuf pour neuf).
- Les livres à compter : importance du moment où on tourne la page. Il faut faire anticiper les élèves sur ce qui va suivre
➢On distingue les parties de la comptine : stable et conventionnelle (acquise), stable non conventionnelle (en cours d'acquisition : des erreurs de temps en temps) et non stable non conventionnelle (non acquise : désordre). Il faut travailler sur la 2ème.

Domaines des nombres :
➢Nombres visualisables : il faut entraîner les élèves à reconnaître une quantité sans recourir au dénombrement : petits groupes.
➢Nombres familiers : ≤15 ou 16 : douzaine d'œufs.
➢Nombres fréquents : ≤30 : nombre d'élèves de la classe.
➢Grands nombres : effet magique : mille, million, milliard.

Codage/décodage :
➢L'enfant fait du codage lorsqu'il passe de la quantité à l'écriture du nombre ou au mot correspondant.
L'enfant décode s'il passe du chiffre écrit à une quantité d'objets sur la table par exemple.
➢La bande numérique peut servir de support. C'est un outil pour coder une quantité.

NUMERATION : Système de numération : Cycle II et III

➢La numération parle des signes organisés pour rendre compte d'un nombre.
Au cycle 1 : découverte du nombre. À partir du cycle 2 => système décimal

IO :
Premier temps : élèves prennent conscience que les nombres servent à résoudre des problèmes (cf exploitation des données numériques). Ensuite construisent progressivement les connaissances sur la numération décimale (extension du domaine numérique depuis cycle I vers cycle III).
Au cycle II, le recours à la monnaie est un support privilégié car favorise la compréhension.

Connaissances doivent être bien maîtrisées à la fin de l'école primaire en lecture et en écriture : système positionnel.
Limitation à la classe des millions. Relation avec la proportionnalité et les nombres décimaux pour le rangement sur graduation.
Relations sur nombres courants sert d'appui pour le calcul mental, notamment approché. Approche de l'arithmétique du collège.

Cycle II : Connaissance des nombres entiers naturels
Désignation orale et écrite (inférieurs à 1000) : dénombrer, réaliser des quantités, comprendre la valeur des chiffres en fonction de leur position, produire des suites orales de 1 en 1, de 10 en 10 ou de 100 en 100, associer désignation orale et chiffrée.
Ordre sur les nombres entiers naturels : comparer, ranger, encadrer, situer des nombres sur une ligne graduée.
Relations arithmétiques : doubles et moitié des nombres d'usage courant. Connaître les relations entre ces nombres.

Cycle III : Connaissance des nombres entiers naturels
Désignation orale et écrite : déterminer la valeur de chaque chiffre d'un nombre, donner diverses décompositions d'un nombre et inversement, produire des suites orales idem cycle 2, associer désignation orale et chiffrée.
Ordre sur les nombres entiers naturels : comparer, ranger, encadrer, situer précisément ou non, utiliser les signes < et >.
Structuration arithmétique : utiliser expressions double, moitié, demi, triple, tiers, quadruple, quart, deux tiers… Connaître relations entre nombres d'usage courant > à 1000, reconnaître les multiples de 2, 5 et 10.

Nombre :
➢Aspect ordinal du nombre : on s'intéresse à l'organisation, à l'ordre d'apparition. Approche algorithmique (répétition, régularité).
Aspect cardinal du nombre : on s'intéresse à la notion de quantité.

Système de numération :
➢Nécessaire pour :
- représenter les grands nombres. Organisation des quantités. Regroupement en paquets : base de numération.
- dire les nombres : relativement peu de mots : numération orale.
- conserver traces des calculs : numération écrite. Comprend numération écrite en chiffres et en lettres.
➢Le système de numération est un système d'écriture des nombres à l'aide de symboles.
Peut être additif (nombre représenté par répétitions : romains), positionnel (valeur du symbole dépend de la position) ou mixte (babylone : valeur dépend de la position et des répétitions).

Système de numération écrite en chiffres :
➢Positionnel en base 10 : 10 symboles. Le zéro est important pour indiquer la position.
Il est additif et multiplicatif : 23=2x10 + 3
➢La longueur du nombre donne ordre de grandeur.

Numération orale :
➢Les difficultés se retrouvent dans la numération écrite en lettres
Système moins régulier que numération écrite en chiffres : Irrégularités entre 10 et 17 puis 71 puis 80 (4x20 au lieu de 8x10).
➢Conclusions : - le nombre de mots n'est pas lié à la quantité. Ex : cent et dix-neuf.
- il faut plusieurs mots pour écrire un nombre. Ex : dix-neuf.
- avec les mêmes mots on peut écrire des nombres différents. Ex : vingt quatre et quatre-vingts.
- simplification par ajoute de mots : cent, mille, million, milliard.
- il faut passer par numération orale pour écrire en lettres.
➢Intercalation : quel mot peut-on mettre entre les autres ?

Exploitation des données numériques : Situations additives et soustractives

Amorcées des l'école maternelle, l'essentiel des compétences concernant ces deux opérations se construisent entre le CP et le CE2.
Compétences de deux types :
- être capable de résoudre des problèmes relevant des deux opérations. Au départ : procédures personnelles puis expertes.
- être capable de produire le résultat du calcul en choisissant la méthode adéquate (calcul réfléchi, approché, posé…)

Situations additives :

Champ conceptuel de l'addition et de la soustraction. Ces situations additives expliquent les difficultés de choix de l'opération.
La schématisation est difficile à imposer aux élèves. Il faut laisser les élèves utiliser leurs propres représentations.
G. Vergnaud propose 4 catégories :

➢Composition de deux états :

Correspond au statique : représentation du regroupement par accolade
Recherche du composé : A+B=?
Recherche d'un état, d'une partie, d'un composant : A+?=C

➢Transformation d'un état :

Situation dynamique : représentation de la transformation par des carrés (état initial et final) et une flèche entre les deux.

Recherche de l'état final : $\boxed{A}$—B—>$\boxed{?}$
Recherche de l'état initial : $\boxed{?}$—B—>$\boxed{C}$
Recherche de la transformation : $\boxed{A}$—?—>$\boxed{C}$

Les deux dernières situations sont des situations difficiles. L'énoncé des problèmes incite souvent à utiliser l'autre opération.
La place de l'inconnue à chercher est importante. Recherche état final : plus simple à comprendre : utilisation des opérations normale.

➢Comparaison d'états :

Situation statique : aucun regroupement : les éléments ne s'ajoutent pas : juste comparaison.
Recherche de l'un des états :
Recherche de la comparaison : différence, écart entre les deux états. Situations difficiles : vocabulaire plus compliqué.
Dans les comparaisons d'états, les manipulations n'aident pas à la compréhension.

➢Composition de transformations

Gamme étendue de problèmes : succession de plusieurs situations additives avec recherche de l'une des composante ou de la transformation composée. Obligatoirement des situations difficiles nécessitant compréhension des étapes précédentes.

Procédures utilisées par les élèves :

Champ conceptuel de l'addition et de la soustraction. Ces situations additives expliquent les difficultés de choix de l'opération.

➢Types de procédures :

Procédures s'appuyant sur une figuration de la réalité. Comptage possible à partir de la représentation.
Procédures utilisant le surcomptage ou le comptage mental.
Procédures utilisant un calcul sur les nombres après reconnaissance du calcul à effectuer. Traduction mathématiques de l'énoncé.

➢Raisonnements utilisés par les élèves :

Raisonnement avec appui sur le contexte évoqué. Transformation du problème en un type qu'il sait résoudre.
Utilisation d'un schéma intermédiaire : ex la droite numérique.
Traduire l'énoncé par une équation : traduction par une addition ou une soustraction à trou.
Procède par essais en faisant hypothèses sur la réponse.
Il faut prendre conscience du travail intellectuel de l'élève pour résoudre un problème "anodin" pour un expert.

Difficultés rencontrées par les élèves.

La structure relationnelle du problème et la place de l'inconnue sont importantes : cf les structures additives.
Difficulté des calculs compte tenu de l'âge des élèves.
L'ordre d'apparition des données dans le texte.
Présence des mots inducteurs d'une opération : ex : gagner, recevoir pour l'addition, manger, envoler pour soustraction

Les variables didactiques

Taille des nombres et leur taille relative
La configuration des nombres : ex nombres ronds.
La mise à disposition ou non d'outils de calcul : ex : calculatrice.

Apprentissage du calcul de sommes et de différences

➢Difficultés dues à une méconnaissances des résultats de base : mémorisation des tables ou méthodes pour fabriquer les résultats.
Mémorisation pas seulement par la répétition : facilitée par la compréhension et l'intérêt. Facilitée aussi par la structuration des données à mémoriser (pas isolement des résultats).
➢Difficultés dues à la maîtrise insuffisante de la numération décimale : repérer dizaines et unités.
➢Difficultés à mettre en œuvre les propriétés des opérations : utilisation des nombres ronds, changement du calcul...
➢Difficultés liées à des conceptions erronées : conception du "0" comme rien. Interprétation du signe "+" comme addition (d'où des problèmes pour résoudre les additions à trous)

CALCUL

IO :

➢Donnent la priorité au calcul mental et particulièrement le calcul réfléchi. Les connaissances des élèves doivent être opératoires. Ils doivent être capables de les réutiliser dans des problèmes. Il faut donner du sens au calcul réfléchi.
Techniques opératoires pas abandonnées mais envisagées lorsque les élèves ont acquis des connaissances permettant d'en comprendre le fonctionnement.
Calculatrices utilisées comme outil notamment lors de la résolution de problèmes.

Cycle II :

Calcul automatisé : connaître ou reconstruire tables addition : 1 à 9 et les utiliser dans somme, complément, différent, décomposition. Complément à la dizaine. Tables de multiplication par 2, 5 ou 10. Sommes en lignes ou posées en colonne.
Calcul réfléchi : résoudre mentalement problèmes numériques simples. Organiser, traiter calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs.
Calcul instrumenté : utiliser à bon escient une calculatrice (en particulier pour obtenir un résultat lorsqu'on ne dispose pas d'une méthode de calcul efficace).

Cycle III :

➢Exploitation des données numériques :
- Problèmes relevant des quatre opérations : résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées.

➢Calcul :
- Résultats mémorisés, procédures automatisées : connaître et utiliser tables addition et multiplication (1 à 9). Additionner ou soustraire mentalement des dizaines ou des centaines. Connaître le complément à la dizaine, ou à l'entier supérieur pour les décimaux. Multiplier un entier ou un décimal par 10, 100 ou 1000. Calculer les sommes et différences de nombres entiers ou décimaux en calcul en ligne ou posé en colonne. Calculer le produit de deux entiers ou d'un décimal par un entier par calcul posé. Calculer le quotient ou le reste de la division euclidienne d'un entier par un entier (maxi deux chiffres) par calcul posé.
- Calcul réfléchi : Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul additif, soustractif, multiplicatif ou une division en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations. Organiser et effectuer des calculs simples sur les décimaux en utilisant les résultats mémorisés (1.8+0.2). Evaluer un ordre de grandeur en utilisant un calcul approché. Développer des moyens de contrôle des calculs instrumentés. Savoir retrouver mentalement le résultat numérique d'un problèmes à données simples.
- Calcul instrumenté : utiliser à bon escient la calculatrice. Utiliser la calculatrice pour les mêmes opérations que lors du calcul posé. Connaître et utiliser certaines fonctionnalités de sa calculatrice pour gérer une suite de calculs : opérations, mémoires, parenthèses, facteur constant.

Les types de calcul :

➢Document d'application précise trois sortes de calcul :
- Calcul instrumenté : usage des calculatrices et des tableurs.
- Calcul posé, écrit : comprend les techniques opératoires habituelles (les enfants doivent comprendre à quoi elles servent) mais aussi les techniques écrites non standard relevant du calcul réfléchi (pas d'opérations posées).
- Calcul mental :

Il est utile dans la vie quotidienne en particulier pour trouver l'ordre de grandeur d'un résultat.
Il est aussi utile pour comprendre certaines notions mathématiques (ex : tables de multiplications pour trouver certaines relations).
Il oblige à utiliser certaines propriétés des opérations (décompositions, recompositions…).
Aide à la résolution des problèmes. L'élève peut changer la résolution en utilisant des nombres plus simples.

➢Deux sortes de calculs mentaux :
- automatique : réponse immédiate : tables, doubles, moitiés, compléments à dix. Utilise la mémorisation.
- réfléchi : construction personnelle. Multiplicité des méthodes.

Le calcul réfléchi :

➢Le calcul réfléchi doit précéder le calcul posé. Ce point s'oppose aux volontés culturelles et sociales.
Les techniques du calcul réfléchi s'appuient sur la compréhension du système de numération (centaines, dizaines, unités, décompositions, recompositions, relations…). De nombreux résultats sont accessibles sans recourir aux techniques usuelles.
Le principal obstacle au calcul réfléchi est la transposition de la technique opératoire experte. Il ne faut pas la présenter trop vite.

➢Repères didactiques.
Les décompositions de 10 sont un appui privilégié. Idem pour les relations simples : doubles, triples…
Il est plus facile d'avancer que de reculer : on peut transformer une soustraction en addition à trous.
Apprentissage des tables passe aussi par apprentissage des combinaisons : 4+7=7+4
Deux catégories d'enfants : les mémorisants (plus rapide mais trouvent leurs limites sur les grands nombres) et les reconstructeurs (moins rapides avec risque d'erreurs par la surcharge mentale qui nécessite des points d'appui).
Technique 31-18=31-20+2 est a présenter au collège. Peut être utilisée en utilisant la bande numérique comme point d'appui.

➢Des situations problèmes peuvent être plus difficiles à comprendre si la stratégie de résolution à employer n'est pas cohérente avec le sens su problème. Des nombres proches peuvent inviter à avancer même s'il faut faire une soustraction.

➢Possibilité d'activités ludiques pour anticiper individuellement la division : situations de découverte où la division est cachée.

Techniques opératoires :

➢Addition : plusieurs méthodes : indienne (à partir de la gauche), 14ème (on détaille tout : plus facile à analyser pour la détection des erreurs), classique (plus rapide). On ne commence pas à corriger les problèmes avant d'avoir vérifier la latéralisation des élèves.
On commence par une numération orale. On apprend aux élèves à commencer par la gauche pour ordre de grandeur.
Ensuite on apprend à compter à partir de la droite pour la résolution (technique arabe).
➢Soustraction : plusieurs méthodes : en premier additions à trous puis classique par compensation (opération difficile, belle mais trop experte) ou anglo-saxonne par emprunt (plus simple avec plus de sens).
Deux notions différentes en fonction des termes utilisés : pour aller à (aspect ordinal) et moins (aspect cardinal)
➢Multiplication : Compréhension obligatoire : u x u = unités ; u x d = dizaines ; d x d = centaines…:
- classique ou Fibonacci : nécessite latéralisation. Favorise la compréhension. 3 difficultés : ordre de résolution, comprendre la décomposition, gestion de la retenue (multiplication plus addition complique).
- Per Gelosia : en diagonales dans un tableau : pas d'ordre à respecter, repérage de l'erreur plus simple : technique plus simple mais le sens est moins privilégié.
- Indienne (dans le sens de lecture) ou des paysans russes (utilisation des moitiés : pas besoin de connaître les tables mais aucun sens).
➢Division : - Au départ : additions et soustractions successives possibles tant que les nombres sont petits : CE2 et début CM1.
- technique classique en potence ou par tranches. Utilisation de soustractions apparentes même en fin d'école primaire.
Les élèves apprennent à rechercher le nombre de chiffre du quotient : permet d'éviter les erreurs de grandeur.
Décomposition du quotient possible au départ pour permettre compréhension du sens des différentes soustractions.
Les élèves construisent un répertoire multiplicatif du diviseur. Construction possible par addition. Evite erreurs de calculs ultérieures.

Différents sens de la division :

Différentes situations avec différentes images et significations peuvent se résoudrent par la même opération : difficulté pour les élèves.
➢Situations ne relevant pas du partage : produits de mesure (surfaces) ou cartésiens (possibilités), comparaisons d'états (distances).
➢Situations relevant du partage : Deux notions importantes : les parts doivent être égales et le reste le plus petit possible.
Manuels doivent alterner situations de recherche de la valeur d'une part (division partition) ou du nombre de parts (division quotition).
➢Division de deux nombres éloignés plus difficile : estimation plus difficile. Toute division s'écrit sous la forme d'une équation.

Calcul instrumenté (la calculatrice) :

➢Découverte de la calculatrice dès cycle 2 :
Première étape : laisser les enfants manipuler.
Distinguer différence entre ce que l'on tape et ce que l'on voit. Phase d'anticipation, puis confrontation et discussion et enfin découverte, vérification.
Conclusions : la machine sait des choses qu'on ne voit pas. Elle garde en mémoire des informations.
Points observables : 2ème chiffre pousse le premier. Signe opératoire efface nombre précédent. Difficulté de certains boutons (Del CE AC ou C). Mots en anglais. Le signe = de la calculatrice n'a pas le même sens que le = mathématique [=].
➢Varier les activités de codage et de décodage.
➢Opérateur constant. La calculatrice garde dernier nombre ou dernière opération en mémoire. Si on réappuie sur [=], les résultats continuent.
➢Il faut apprendre à utiliser les mémoires pour remplacer les parenthèses.
➢Les calculatrices utilisent soit des nombres rationnels soit des nombres décimaux : les résultats peuvent être différents.
➢Les arrondis peuvent aussi être différents (arrondi ou troncature) : programme du collège.

PROPORTIONNALITE

Multiples et diviseurs n'ont de sens que dans le champ des entiers naturels pour les élèves.
Les enfants ne pourront résoudre des problèmes de proportionnalité que s'ils peuvent voir les relations entre les nombres.

IO :

➢Donnent la priorité au raisonnement des élèves. Le raisonnement d'un élève sera différent de celui du voisin ou du même élève dans une autre situation. Il faut penser à donner des problèmes de proportionnalité et d'autres de non-proportionnalité. Il s'agit d'une approche de la proportionnalité qui sera mise en place au collège : le terme (proportionnalité ne doit pas être mentionné).
➢Confronter les élèves à la lecture, l'interprétation critique et la construction de divers modes de représentation à partir de données effectives. On partira de données proches et effectives de l'élève pour que l'interprétation de l'information ne soit pas trop dure.

Cycle III : Exploitation des données numériques

Proportionnalité : résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant des raisonnements personnels appropriés (dont les problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unités).
Organisation et représentation de données numériques : organiser des séries de données (listes, tableaux…). Lire, interpréter et construire quelques représentations : diagrammes, graphiques.

Rappel théorique des différentes méthodes de résolution :

4	8	12
6	12	

Linéarité additive : 4+8=12 donc 6+12 = 18.
Linéarité multiplicative : 4*3=12 donc 6*3 = 18. 3 est appelé coefficient scalaire.
Proportionnalité : 6=4*1.5 donc 12*1.5=18. 1.5 est appelé coefficient de proportionnalité.
Règle de trois : 12*6/4=18 permet de rechercher le 4ème nombre, la 4ème proportionnelle. Cette méthode n'est pas au programme.

Analyse des procédures de résolution des élèves :

➢Méthodes les plus fréquentes : - linéarité multiplicative ou additive.
- valeur unitaire ou retour à l'unité, procédure en 2 étapes : calcul du prix d'un objet puis calcul du prix de n objets par exemple. Cette méthode enchaîne donc deux linéarités multiplicatives. Elle est plus facile à comprendre au niveau du sens.
➢Méthodes moins courantes : coefficient de proportionnalité. Utilisation de graphique (on peut l'observer, mais cette méthode n'est pas à utiliser par les élèves). La règle de trois ou produit en croix sont à réservés au collège.

Classification des problèmes de proportionnalité :

➢Classement en fonction des grandeurs et natures :
- La difficulté dépend du nombre de grandeurs en jeu et pas du nombre de données. En élémentaire, on limite à 2 grandeurs.
- La difficulté tient ensuite à la nature des grandeurs. Si les grandeurs sont de même nature (grenadine et sirop) on peut utiliser une relation du type "fois plus" qui permettra utilisation du coefficient de proportionnalité. Si les grandeurs sont différentes (masse et prix) les problèmes sont plus complexes.
- On peut observer plus de 2 grandeurs. Les problèmes sont alors soit avec des proportionnalités simples (médicaments, boites, plaquettes) soit avec des proportionnalités multiples (budget : prix par personne par jour).
➢Classement en fonction de l'énoncé :
La manière dont le coefficient de proportionnalité est donné influe beaucoup.
Si la valeur unitaire est donnée ou si un couple de nombre en relation permet de retrouver le coefficient de proportionnalité simplement la résolution sera moins difficile.
Situations de pourcentages, d'échelle, de vitesse…

Variables didactiques en proportionnalité :

➢Une variable didactique est un élément sur lequel l'enseignant peut jouer et qui est susceptible de modifier les procédures de résolution, la représentation de la situation que se fait l'enfant, la difficulté de l'exercice…
➢Différentes variables :
- contexte : il peut être très différent. Présentation de l'énoncé : dessin, texte, tableau
- taille des nombres : grands, petits, relation entre eux (proches, relations simples ou non).
- grandeurs en jeu : nature des nombres. Unités (changements ?)
- quantité d'informations : présences de données inutiles
- …

DECIMAUX

IO :

➢Il s'agit de mettre en place une première maîtrise des fractions et des nombres décimaux : compréhension de leurs écritures, mises en relation des écritures… avant une étude plus approfondie au collège.
Il faut présenter situations où les nombres naturels ne permettent pas de résoudre le problème. Fractions servent à donner du sens aux nombres décimaux. Compréhension de la valeur d'un chiffre en fonction de sa place dans le nombre est importante.

Cycle III : Connaissance des fractions simples et nombres décimaux :

Fractions : utiliser dans des cas simples des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires. Nommer les fractions en utilisant le vocabulaire. Encadrer une fraction par deux entiers. Ecrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction<1.
Désignation orale et écrite des nombres décimaux : déterminer la valeur de chacun des chiffres en fonction de sa position. Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale. Utiliser les nombres décimaux pour exprimer mesures de longueurs ou d'aires sur une règle graduée de 1 en 1. Ecrire et interpréter une mesure sous forme décimale avec plusieurs unités. Produire des décompositions à partir des écritures à virgule. Produire des suites orales ou écrites. Associer désignations orales et chiffrées d'un nombre décimal.
Ordre sur les nombres décimaux : comparer deux nombres décimaux. Encadrer un nombre décimal par deux entiers ou deux décimaux. Intercaler des décimaux. Utiliser les signes < et >. Donner une valeur approchée d'un décimal à l'unité, au dixième ou au centième. Situer des décimaux sur une droite graduée.
Relations entre certains décimaux : 0.1 et 1/10, 0.5 et ½, 0.01 et 1/100, 0.25 et ¼, 0.75 et ¾. Connaître et utiliser les écritures et les relations.

Rappels théoriques :

➢Les ensembles
N : entier naturel : permet de dénombrer : >0
Z : entier relatif : choix d'un repère arbitraire : température, dates, altitudes… >0 ou <0
D : nombre décimal : d décimal si $d*10^n$ est entier
Q : nombre rationnel : si peut s'écrire en fraction de deux entiers.
R : nombre réel : ne peut pas s'écrire à partir de deux entiers.
➢On utilise N pour mesurer des quantités discrètes. Avec D et Q on approche les quantités continues.
N est plein de trous alors que D est dense. Il y a toujours un décimal entre deux décimaux.
Multiplication de deux décimaux est reportée au collège.
➢Historique : fractions sont très anciennes (babylone). Les nombres décimaux sont apparus pour simplifier les calculs et les comparaisons. Les calculs sont aisés dans D alors que les calculs et les comparaisons sont difficiles dans Q.

Progression :

➢Progression générale prescrite dans document d'application :
Introduire les fractions. Leur donner du sens : longueurs, aires, règles graduées.
Introduire les fractions décimales pour donner ce sens.
Passage à l'écriture décimale : ¼ devient 0.25
➢Fractions en cycle 3 doivent être inférieures à 10, sinon trop compliqué pour donner du sens.
La fraction est introduite par le partage d'une unité. ¼ c'est un tout partagé en quatre
Ce partage peut ensuite être réitéré pour passer aux fractions supérieures à 1. ¾ c'est 3*¼ puis 5/4 c'est 5*¼.
Les fractions ne sont pas objet de compétences à acquérir. Il ne faut donc pas donner d'exercices systématiques sur les fractions (égalité, calculs, comparaisons).

Erreurs de définitions présentes dans certains manuels :

➢D est l'ensemble des nombres qui s'écrivent avec 2 chiffres après la virgule. Or cet ensemble ne serait pas dense. Définition erronée. C'est une conception plus simple à comprendre mais qui ne rend pas compte convenablement de l'ensemble. Il faut aller plus loin en primaire. Ex : trouver un nombre avec réponse par plus ou moins pour approcher la notion de densité.
➢Méthode de comparaison avec rajout des zéros vient renforcer cette conception :
Comparaison de 3.15 et 3.2. On ajoute un zéro et on compare 3.15 et 3.20. 20>15 donc 3.2>3.15. Solution simple mais ne rend pas compte de la densité.
Il vaut mieux utiliser comparaison de la partie entière puis des dixièmes puis des centièmes puis des millièmes…

Analyse de production des élèves (APE) : Difficultés :

➢Obstacle épistémologique lié à la connaissance : la notion d'infini et de densité est difficile.
➢Le contrat didactique entre le maître et l'élève fait que l'élève cherche une solution même s'il n'a pas les connaissances nécessaires.
➢Certains élèves rangent selon la partie décimale : règle des entiers.
➢D'autres comme si la partie décimale était un nombre entier : conception sous-jacente : un nombre décimal, c'est deux entiers séparés par une virgule. Partir du système métrique peut renforcer cette idée fausse. Il faut donc l'aborder après pour donner du sens concret.
Cette conception peut se traduire par des opérations erronées : 3.7+5.8=8.15.
➢La multiplication par 10 d'un décimal. Approche des entiers est alors importante. Approche du style "unité devient dizaine" est préférable à "on rajoute un zéro". Elle peut se compléter par "dixième devient unité".
➢Difficulté de conception pour l'élève : un même objet peut avoir plusieurs statuts mathématiques : 2=2.0
➢Passage sur des fractions supérieures à 1 constitue une difficulté. Avant la graduation entière constituait l'unité. Une fraction était le fruit d'un partage. Des mauvaises conceptions sont donc : une fraction est plus petite que 1 ou le numérateur doit être inférieur au dénominateur. Exercices d'intercalation d'une fraction entre deux entiers permettent de donner du sens. La fraction a une notion cardinale et pas ordinale.
APE en décimaux : analyse des erreurs. Si les résultats sont bons, on a rien à dire. On ne peut pas rechercher la conception sous-jacente ou la méthode utilisée comme pour la proportionnalité.

Géométrie et repérage dans l'espace

Objectif principal de la géométrie à l'école : aider l'enfant à se construire dans l'espace.

IO :
Travaille dans l'espace en 3D avant 2D car enfant perçoit le milieu en 3D.
Depuis IO 1985 : manipulations nombreuses d'objet de la vie quotidienne.
Structuration de l'espace est réelle pour l'enfant : espace physique, réel, concret.
Espaces : micro espace main, méso espace visible globalement, macro espace invisible globalement.
Activités dans l'espace vont amener le travail dans le plan. Passage espace géométrique nécessite travail.
On passe de point puis ligne puis plan puis espace vers le cheminement inverse.
Exemple d'activité : imagination ou décomposition d'un patron d'une boîte, étude des formes.

Cycle I :
Repérage dans l'espace : vocabulaire (devant, derrière, dessous, dessus…).
Situations doivent permettre à l'enfant d'imaginer le point de vue d'un autre. Utilisation de maquettes avant les dessins.
Découverte des formes et des grandeurs: Observation : repérer des critères permettant de distinguer les formes, de les comparer, classer et ranger : (ça roule, petit/grand, lourd/léger, forme, taille…) notamment par les contours (droit, courbe, plat, arrondi…).
Reconnaître quelques formes simples (carré, triangle, rond…).
Passage du langage courant (rond, boule, forme…) vers géométrique (cercle, sphère, figure) introduit mais pas objectif principal.

Cycle II :
Toujours priorité au repérage dans espace : (orientation, situer un objet en position relative…)
Activités de perception des propriétés des objets et de conception (élaboration mentale avant construction réelle).
Amener les élèves à réfléchir : situations de résolution de problème. Observation n'est plus suffisante.
Vocabulaire géométrique s'étoffe mais encore limité pour aborder géométriquement les propriétés des objets ou des figures.
Activités de conception : tâches d'anticipations : proposer réponse avant de vérifier.
Début de l'instrumentation (règle, gabarits, papier quadrillé…) et début des propriétés (carré, triangle, rectangle, cercle, sommets, côtés, face, arête, cube, pavé droit, angles droits, alignements, axe de symétrie…).

Cycle III :
Passage de la perception et de la conception toujours présentes à une explication géométrique des propriétés avec recours aux instruments. La règle non graduée est aussi importante que la règle graduée. La connaissances des propriétés est fonctionnelle et pas formelle : permet de décrire et de reconnaître.
Les activités proposées sont plus nombreuses et variées qu'aux autres cycles :
- Reproduire : réaliser une copie à partir d'un modèle. Réfléchir, repérer les propriétés puis instrumentation.
- Comparer : en utilisant des critères acquis dès cycle I : taille, couleur, fonction, matière. Vocabulaire géo.
- Décrire : communiquer des propriétés : utilisation du vocabulaire. Problèmes de perception encore présents.
- Construire : réaliser un objet sans avoir le modèle : aussi plusieurs étapes.
- Représenter : dessiner sur un plan des solides de l'espace. Entraîne déformation.

Repérage dans l'espace toujours présent : localiser, se repérer, se déplacer : (cartes, plans, quadrillages, distances…).
Vocabulaire s'étoffe : description plus précise des propriétés (alignement, perpendicularité, parallélisme, symétrie…) pour décrire des figures planes (cycle II plus isocèle, équilatéral et rectangle pour le triangle, rayon, centre et diamètre pour cercle et losange) ou des solides (cube et parallélépipède rectangle). Figures et solides mentionnés dans compétences sont limités. Par contre activités doivent permettrent de rencontrer autres formes : cerf-volant, trapèze, prisme, pyramide…
Il faut habituer les enfants en traçant des formes inhabituelles : rectangles allongés, figures non parallèles aux carreaux…
Introduction des transformations (agrandissement et réduction) permet d'aborder les échelles en lien avec la proportionnalité.

Remarques sur les représentations :
Perspective cavalière seulement en lecture : réalisation au collège.
Représentations propres à l'élève doivent lui permettre de distinguer mentalement et de reconnaître objet.
Dessin : représente fidèlement le réel.
Figure : dessin qui cherche à rendre compte des propriétés de l'objet, qui représente un objet théorique.
Importance de l'objet physique pour faciliter la représentation.
Ensuite emploi de certaines conventions (début de perspectives, pointillés pour non visible).
Prégnance de ce qui est vu mais aussi importance de ce que je sais (dessin du non visible selon propriétés).

Exemple de difficultés pour les élèves :
Au cycle 3 : compter le nombre d'arêtes d'un solide à partir d'un patron.
Perception du carré : depuis une forme distincte au cycle I vers un rectangle particulier au cycle III.
Idem pour le losange comme parallélogramme particulier.

Manuels :
- Maths Elem CE2 : introduction par le plan : limite obligatoire liée aux représentations.
  Donne définition parfois difficiles, patron et demande de reproduction : pas géométrie dans espace.
- Cap Maths CE2 : part de l'objet : activités permettant représentations mentales et utilisation du vocabulaire.

Grandeurs et mesure

IO :
Essentiel des activités : résolution de problèmes concrets, réels. Lien évident avec les sciences et technologies.
Comprend 3 parties : - longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées
- les aires
- les angles

Cycle II :
Approche de la première partie (longueurs, masses, contenances, durée…) par comparaisons directes ou non, avec étalon...
Varier nature et dimensions des objets. Mesure avec instruments réels (règles graduées, calendrier, balance…) ou inventés (ex ficelle).
Utilisation et choix des unités usuelles : m et cm, g et kg, l, j h mn et s.
Connaître jours de la semaine, mois : utilisation du calendrier.

Cycle III :
Première partie (longueurs, masses, contenances, durée) abordée au cycle II est étendue : comparaisons, estimations des ordres de grandeur puis mesures en introduisant les multiples et sous-multiples des unités usuelles (système métrique et sexagésimal).
Construction d'un objet dont les dimensions sont données.
Calculer les dimensions (notamment périmètre d'un polygone, durée par instant initial et final…).

Introduction de la notion d'aire : activités de classement de surfaces avant mesurages. Prolongation au collège.
Comparaisons d'aires avec unité donnée (étalon, pavage) ou unité usuelle (système métrique au carré). Calculer l'aire d'un rectangle.
Distinction aire et périmètre : des figures différentes peuvent avoir la même aire mais pas le même périmètre.

Introduction de la notion d'angles : activités de classement avant activités de mesurages en degrés seulement au collège.
Aucune incidence entre la longueur des côtés et l'angle.
Utilisation de gabarits dans les figures (triangles, quadrilatères…). Reproduction angle par gabarit.
Construire angle droit et sous parties (moitié, quart, tiers…).

Remarques sur les aires:
Concept de forme et de place difficile à mettre en œuvre. Au départ confusion. Il faut apprendre à les distinguer.
Les comparaisons mettent en évidence les surfaces.
Outil de comparaison à privilégier : la superposition. Il faut souvent avant découpage et retournement.
Décomposition puis recomposition (découpage/réassemblage) n'affecte pas l'aire. Des formes différentes peuvent avoir la même aire.
Pas besoin de nombre pour définir l'aire.

Activités autour des surfaces :
- Tangram : classer les différentes pièces en fonction de leur aire
- Partages différents d'une feuille de papier en quatre parties de même surface.
- Construction d'un triangle triple d'un premier (3-4-5) : aire du triangle résultant multipliée par 9=3x3

Compréhension du système métrique accessible par la notion de surface.
Si on multiplie la longueur par 10 alors la surface est multipliée par 100.
…

Grandeurs mesurables et repérables :
Ex : sur les temps et durée. Ambiguïté : 1 heure : distinguer durée et instant. Présence de deux grandeurs repérables (instant) et mesurable (durée)
La plupart des grandeurs sont mesurables. Grandeurs repérables moins nombreuses : instant, température, QI…
Le 0 n'a pas la même signification : origine du repère dans repérable ou absence dans mesurable.
Sur les grandeurs mesurables : addition et soustraction. Sur les grandeurs repérables : seulement addition.
Induit des erreurs chez les élèves. Ex : règle graduée : "montrez un centimètre" : confusion avec le un sur la règle (repère) alors qu'entre 2 et 3 : mesure. Construction des règles par ajouts d'étalons d'1 cm évite confusion et erreur de mesure avec espace avant le 0.

Instant et durée :
Instant : grandeur repérable. C'est une marque, une borne. Aspect ordinal avec des nombres relatifs (ex frise chronologique : -50avJC)
Travail dès la maternelle sur frise du temps : linéarité (instant passé) et périodicité (des instants dans la journée par ex).
Durée : grandeur mesurable. C'est un intervalle, un espace. Aspect cardinal (combien ?) avec des nombres naturels en base 60.
Notion difficile pour donner du sens :
- aucun support : on dispose d'objets physiques pour les masses, on voit les longueurs et les surfaces.
Pour faire prendre sens il faut faire intervenir la perception subjective des enfants et les faire prendre position
- comparaison directe impossible : ex : comparer temps pour une division ou récréation.
Nécessité d'instruments de mesure : instant (montre, horloge, calendrier…) ou durée (sablier, métronome, minuteur, chronomètre…).
Calcul réfléchi pour le calcul des durées : calcul opératoire proscrit : base 60 trop compliquée. Nécessite compréhension des correspondances entre les unités usuelles et des activités de comptage de 5 mn en 5 mn par ex.
Lecture de l'heure difficile : travail quotidien : identifier le rôle de chaque aiguille, proportionnalité de déplacement entre les aiguilles, lecture directe de l'heure mais pas des minutes, chiffres romains, quarts d'heures demi heures, minutes après 30 (moins quelquechose), base 12 ou 21…