OPERATIONS DANS Z, D, Q ET R

I. Addition

L'addition est une loi de composition interne sur les ensembles W, [, X et Y (la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif, la somme de deux décimaux est un décimal, ...).

Elle conserve plusieurs propriétés sur chacun de ces ensembles.

- Elle est commutative, associative et dispose du nombre O comme élément neutre.
- Elle est compatible avec la relation d'ordre (on peut donc toujours ajouter membre à membre des inégalités de même sens).
- Sur les ensembles W, [, X et Y, chaque élément dispose d'un symétrique, appelé opposé.

II. Soustraction

Si la soustraction n'est pas une loi de composition interne sur V, elle l'est sur les ensembles W, [, X et Y .

La soustraction dispose sur les ensembles W, [, X et Y de peu de propriétés.

- Elle n'est pas commutative, ni associative.
- Elle est compatible avec la relation d'ordre mais on ne peut pas soustraire membre à membre des inégalités de même sens.
- 0 a un statut particulier : pour tout nombre n, n - 0 = n et n - n = 0.
- La soustraction possède la propriété dite des différences égales. On ne modifie pas une différence en ajoutant un même nombre à ses deux termes.

III. Multiplication

La multiplication est une loi de composition interne sur les ensembles W, [, X et Y (le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif, le produit de deux décimaux est un décimal, ...).

Sur ces ensembles, elle dispose de plusieurs propriétés.

- Elle est commutative, associative et dispose du nombre 1 comme élément neutre.
- Elle est distributive sur l'addition et la soustraction.
- Elle n'est compatible avec la relation d'ordre que sur les ensembles W+, [+, X+ et Y+.

  En effet, les ensembles W, [, X et Y comportent des nombres négatifs.

  Par exemple, $3 < 5$ alors que $-10 < -6$, c'est-à-dire que $(-2) \times 5 < (-2) \times 3$. Le sens de la première inégalité est inversé lorsqu'on multiplie ces deux membres par le nombre négatif -2.

  On ne peut multiplier membre à membre que des inégalités entre nombres positifs : si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq a \times c \leq b \times d$.
- Le nombre 0 dispose toujours d'un statut particulier pour la multiplication puisque le produit de tout élément par 0 est égal à 0.
- Dans W , seul le nombre 1 dispose d'un symétrique (lui-même).
- Dans X et Y , tous les éléments non nuls ont un symétrique, appelé inverse. L'inverse d'un élément a, non nul, appartenant à X ou à Y , se note a^{-1} ou $\frac{1}{a}$.

IV. Division (dans X* et Y*)

1. <u>Définition</u>

Etant donné deux nombres a et b appartenant à X* ou Y*, diviser a par b, c'est chercher par quel nombre il faut multiplier b pour obtenir a. Autrement dit, diviser a par b, c'est chercher le nombre q tel que $b \times q = a$.

Dans X* et Y*, il est toujours possible de diviser a par b. Le quotient de a par b, est égal au produit de a par l'inverse de b (noté b^{-1} ou $\frac{1}{b}$).

Il s'agit d'un quotient exact, noté a : b ou $\frac{a}{b}$.

On a : q = a : b = a x b^{-1} et b x q = a.

2. Propriétés

Pour les ensembles X* et Y*, la division dispose de peu de propriétés. Elle n'est ni commutative, ni associative et n'a pas d'élément neutre.

En revanche, elle est compatible avec la relation d'ordre si l'on se limite aux nombres rationnels ou réels strictement positifs.

V. Règles de calcul

1. Règles de priorité entre les opérations

Il peut arriver qu'un calcul en ligne mélange différentes opérations (additions, soustractions, multiplications, divisions). Il existe alors des conventions qui déterminent, en l'absence de parenthèses, l'ordre dans lequel les calculs doivent être effectués.

- En l'absence de parenthèses et si le calcul ne comporte que des additions ou des soustractions, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.

- En l'absence de parenthèses et si le calcul ne comporte que des multiplications ou des divisions, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.

- En l'absence de parenthèses et si le calcul comporte des multiplications ou des divisions mélangées à des additions ou des soustractions, on commence par effectuer les multiplications et les divisions, puis on effectue les additions et les soustractions.

  La multiplication ou la division sont prioritaires par rapport à l'addition ou la soustraction.

Exemples :

- Pour calculer 2 + 3 x 4, on calcule d'abord le produit 3 x 4, soit 12, auquel on ajoute 2. Le résultat est donc 14.
- Pour calculer 12 : 3 + 5 x 6, on calcule en premier lieu 12 : 3, puis 5 x 6 (ou l'inverse), puis on ajoute les résultats de ces deux calculs. On trouve donc 4 + 30 = 34.
- Pour calculer 30 : 2 x 6, on calcule d'abord 30 : 2, soit 15, puis on multiplie ce nombre par 6 et on obtient 90.

Sup de Cours - Etablissement d'enseignement privé RNE 0333 119 L - 73, rue de Marseille - 33000 Bordeaux

2. Rôle des parenthèses dans les calculs

Les parenthèses sont utilisées pour modifier l'ordre conventionnel des calculs.

Dans un calcul en ligne, on commence par effectuer les calculs mis entre parenthèses, puis on applique les règles de priorité usuelles.

Si des parenthèses sont imbriquées les unes dans les autres, on commence par effectuer les calculs mis dans les parenthèses intérieures.

Exemples :

- Le résultat du calcul (2 + 3) x 4 est égal à 20.
- Le calcul 3 + 16 : (5 + 3) s'effectue de la manière suivante: 5 + 3 = 8, puis 16 : 8 = 2 et enfin 3 + 2 = 5.
- Le calcul (8 – (3 + 1)) x 3 s'effectue dans l'ordre suivant : 3 + 1 = 4, puis 8 – 4 = 4 et 4 x 3 = 12.

3. Règles des signes dans les multiplications

Lorsque l'on effectue des calculs dans les ensembles W, [, X et Y , on peut être amené à multiplier entre eux des nombres négatifs ou positifs. On applique alors certaines règles pour les signes.

- Le produit de deux nombres positifs est un nombre positif.
- Le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est un nombre négatif
- Le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif.

4. Règles des signes dans les divisions

- Le quotient d'un nombre positif par un nombre strictement positif[1] est un nombre positif.
- Le quotient d'un nombre positif par un nombre strictement négatif est un nombre négatif.
- Le quotient d'un nombre négatif par un nombre strictement positif est un nombre négatif.
- Le quotient d'un nombre négatif par un nombre strictement négatif est un nombre positif.

[1] Car le diviseur ne peut pas être nul.

5. Multiplication et division d'un décimal positif par une puissance de 10

- Pour multiplier un nombre décimal par 10^n, avec n entier positif, il suffit de déplacer la virgule de n rangs vers la droite, en ajoutant si nécessaire un certain nombre de 0 à droite de l'écriture de ce nombre.

  Exemple :

  $0{,}054 \times 10^4 = 0{,}0540 \times 10^4 = 540$

- Pour diviser un nombre décimal par 10^n, avec n entier positif, il suffit de déplacer la virgule de n rangs vers la gauche, en ajoutant si nécessaire un certain nombre de 0 à gauche de l'écriture de ce nombre.

  Exemple :

  $54 \times 10^{-4} = 0{,}0054$

6. Puissances d'un nombre

- Rappel :
  - $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ (n fois a), pour n entier positif.
  - $a^0 = 1$
  - $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ avec $a \neq 0$. 0^0 n'est pas défini.

- Propriétés des exposants entiers (la division par 0 est exclue)

Règle	Exemple
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$5^3 \times 5^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5)$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$
$a^m \times b^m = (a \times b)^m$	$3^3 \times 6^3 = (3 \times 3 \times 3) \times (6 \times 6 \times 6)$ $= (3 \times 6) \times (3 \times 6) \times (3 \times 6)$ $= (3 \times 6)^3$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(4^2)^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4)$ $= 4^{2\times 3} = 4^6$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$(\frac{5}{3})^3 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$ $= \frac{5\times 5\times 5}{3\times 3\times 3} = \frac{5^3}{3^3}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

7. Calculs avec des fractions ou des quotients

Soit un nombre entier naturel a et trois nombres entiers naturels non nuls b, c et d.

Règle	Exemple
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{5}{13} + \frac{2}{13} = \frac{(5+2)}{13} = \frac{7}{13}$
$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a\times d}{c\times d} + \frac{b\times c}{c\times d} = \frac{a\times d+b\times c}{c\times d}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2\times 7}{5\times 7} + \frac{3\times 5}{5\times 7}$ $= \frac{2\times 7+3\times 5}{5\times 7} = \frac{29}{35}$
$a + \frac{b}{c} = \frac{a\times c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a\times c+b}{c}$	$3 + \frac{2}{5} = \frac{3\times 5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3\times 5+2}{5} = \frac{17}{5}$
$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a\times b}{c\times d}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2\times 3}{5\times 7} = \frac{6}{35}$
$\frac{a}{c} \times b = \frac{a\times b}{c}$	$\frac{2}{5} \times 4 = \frac{2\times 4}{5} = \frac{8}{5}$
$1 : \left(\frac{b}{c}\right) = \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} = \frac{c}{b}$	$1 : (\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3})^{-1} = \frac{3}{4}$
$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{a\times d}{c\times b}$	$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times (\frac{3}{7})^{-1} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$
$a : \left(\frac{b}{c}\right) = a \times \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} = a \times \frac{c}{b} = \frac{a\times c}{b}$	$5 : (\frac{4}{3}) = 5 \times (\frac{4}{3})^{-1} = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

8. Calculs avec les radicaux

Si a désigne un nombre réel positif, l'écriture $\sqrt{a}$ désigne le nombre réel positif qui est la solution de l'équation $x^2 = a$. On appelle radical le signe $\sqrt{\ }$.

Soit deux nombres réels positifs a et b.

- $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Si n désigne un nombre entier naturel $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- Si $a \neq 0$, alors $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$.
- En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.