

Didactique Mathématiques

Les nombres entiers	3
Le premier apprentissage des nombres en maternelle et en début de CP	3
Les compétences visées	3
Plusieurs types de problèmes	3
Quelles procédures pour résoudre ces problèmes ?	3
Quelques variables didactiques	4
Exemples d'activités pour l'apprentissage de la suite des nombres	4
Apprentissage de la numération au cycle 2	5
Les objectifs d'apprentissage	5
Les matériels de numération	5
Les difficultés de l'enseignement de la numération	5
Exemples d'activités privilégiant le sens cardinal des nombres	6
Apprentissage de la numération au cycle 3	7
Les compétences visées	7
Difficultés rencontrées	7
L'enseignement des nombres entiers à l'école primaire	7
Les nombres rationnels, décimaux et réels	8
Les fractions au cycle 3	8
Les compétences visées	8
Introduction à la notion de fraction au cycle 3	8
Fractions : modèles implicites ou conceptions des élèves	8
Les nombres décimaux au cycle 3	9
Introduction des nombres décimaux	9
Nombres décimaux : modèles implicites ou conceptions des élèves	9
Calculs avec les fractions et les nombres décimaux	10
Calculs avec des nombres écrits sous forme fractionnaire	10
Calculs avec des nombres décimaux écrits avec une virgule	10
Calcul posé des nombres décimaux	10
Des erreurs courantes dans les calculs de sommes, de différences ou de produits	11
La comparaison des fractions et des nombres décimaux	11
Comparaison des nombres décimaux	11
Synthèse	12
L'enseignement des nombres rationnels, décimaux et réels à l'école	12
Opérations	13
Divers types de calcul	13
Calcul posé, calcul instrumenté	13
Calcul mental	13
Calcul réfléchi	14
Apprendre à calculer	14
Apprentissage de l'addition	14
Apprentissage du calcul multiplicatif	15
Apprentissage du calcul soustractif	16
Apprentissage de la division	17
Les erreurs de calcul	18
Des erreurs dans la présentation des calculs	18
Des erreurs dans la chronologie des calculs	18
Des erreurs dans les résultats mémorisés	18
Des erreurs dans la gestion des retenues	18
Autres erreurs	19
Des pistes pour travailler sur les erreurs	19
Le sens des opérations	19
Classification des problèmes additifs	19

Fonctions et Proportionnalité	20
Les fonctions numériques à l'école	20
Quels aspects de la proportionnalité prendre en compte ?	20
La proportionnalité peut être examinée dans 3 cadres différents	20
Situations servant de support à ces procédures	20
Typologie des problèmes posés	21
Traitement de la proportionnalité	21
Progression	21
Les procédures de résolution à l'école	22
Les principales variables didactiques	22
Les lieux de difficultés rencontrées par les élèves	22
Géométrie	23
Les principales compétences demandées aux élèves	23
Reconnaître	23
Construire	23
Reproduire	23
Décrire	23
Les principales difficultés des élèves et leur analyse	23
Difficultés liées aux connaissances spatiales	23
Difficultés liées aux représentations des objets géométriques	24
Difficultés liées aux tâches de construction	24
Difficultés liées aux tâches de reproduction	24
Difficultés liées aux descriptions de figures	25
Le savoir géométrique à l'école	25
Transformation	26
La symétrie axiale	26
Recherche d'un axe de symétrie	26
Tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe	27
L'agrandissement et la réduction	27
L'enseignement des transformations à l'école primaire	27
Géométrie dans l'espace	28
Les solides	28
Identifier des propriétés d'un solide	28
Reconnaissance de patrons	28
Construction de patrons	28
Les programmes	28
Grandeurs et Mesures	29
Enseignement des grandeurs et mesures	29
Compétences visées	30
Longueur et périmètre	31
Principales compétences et difficultés	31
Conservation des longueurs	31
Variables didactiques	31
Aires de figures planes	32
Principales compétences et difficultés	32
Variables didactiques	32
Autres grandeurs	32
Les volumes	32
Les durées	32
Les angles	32
Les masses	32

Les nombres entiers

Le premier apprentissage des nombres en maternelle et en début de CP

Les compétences visées

- reconnaître globalement et exprimer de très petites quantités (de un à trois ou quatre)
- reconnaître globalement et exprimer des petites quantités organisées en configurations connues (doigts de la main, constellations du dé)
- connaître la comptine numérique orale au moins jusqu'à trente
- associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée en se référant à une bande numérique
- dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus
- comparer des quantités en utilisant des procédures non numériques ou numériques
- réaliser une collection qui comporte la même quantité d'objets qu'une autre collection (visible ou non, proche ou éloignée) en utilisant des procédures non numériques ou numériques, oralement ou avec l'aide de l'écrit

Plusieurs types de problèmes peuvent être proposés aux enfants de cycle 1 et 2 :

★ **Problèmes d'équipotence** (ou de comparaison de 2 collections) : cardinalité (le nombre exprime la quantité) : ex : construire B équipotent à A collection de référence ; construire C à partir de A de façon qu'à chaque élément de A correspondent 2,3, n éléments de C ; comparer la quantité A et B..., Compléter une collection B pour qu'elle soit équipotente à une collection A.

★ **Problèmes de repérage ordinal** : les nombres sont utilisés comme mémoire de la position, pour se repérer dans une suite de case, dans des listes, etc.

★ **Problèmes d'anticipation d'un résultat** : réunion de 2 ou plusieurs collections, trouver le point d'arrivée d'un pion, étudier les effets des échanges, les partages.

Quelles procédures pour résoudre ces problèmes ?

1. **La correspondance terme à terme** : de celle-ci découle la correspondance de paquet à paquet.

Variable didactique : ☞ taille des collections, ☞ Nature des objets

Difficultés d'utilisation : ■ Les deux collections doivent être proches l'une de l'autre.

■ Les éléments peuvent ou non être déplaçables : si aucun élément n'est déplaçable, il faut trouver une parade.

■ Certains objets posent problème à cause de leur trop grande mobilité (perles, billes...).

2. **L'estimation** : il en existe deux sortes :

★ Evaluation approximative : les enfants répugnent celle-ci car elle ne leur donne pas de certitude et risque de produire une erreur.

★ « Subitizing » : reconnaissance immédiate de la quantité sans dénombrement explicite.

3. **Le dénombrement** : Suite de mots en correspondance terme à terme avec les éléments de la collection considérée, de telle sorte que le dernier mot permette de garder la mémoire de la quantité.

Il existe plusieurs procédures :

- par **vision globale**, les élèves sont capables de reconnaître directement de très petites quantités
- par **perception visuelle**, c'est un terme plus général employé dans le cas où l'élève peut reconnaître la quantité sans la compter, le plus souvent parce que la collection est organisée (disposition spatiale)
- par **comptage un à un** qui consiste à pointer successivement tous les éléments d'une collection et à réciter parallèlement la comptine des nombres

Plusieurs types de difficultés peuvent être rencontrées dans le domaine du comptage :

- des difficultés de mémorisation
- des difficultés à synchroniser le pointage des objets et l'énoncé des mots de la comptine
- des difficultés à distinguer les objets comptés de ceux qui ne le sont pas encore
- l'impossibilité d'extraire le dernier mot cité
- ne pas comprendre que le dernier mot cité représente une quantité

4. Autres procédures :

- ★ Le **recomptage** : $5+3$ on lève les doigts et on recompte,
- ★ Le **décomptage** (ou comptage en arrière),
- ★ Le **surcomptage** (ou comptage en avant) : travaillé par les maîtres au 2^{ème} semestre de GS : pour faire évoluer, on peut faire en sorte que la première collection ne reste pas visible (au lieu de 2 dés on en lance un et on recommence) : capacité à compter non pas à partir de 1 mais de 5 par exemple,
- ★ Le **double comptage** (faire avancer deux suites numériques décalées en même temps) : on part d'une pièce sur le numéro 15 et on avance de 8 : 1 16, 2 17, 3 18... C'est l'équivalent du surcomptage sans les doigts. Erreur habituelle : mauvais départ, décalage de l'une des suites, difficulté à gérer simultanément les 2 comptages sans s'y perdre.

5. **Les procédures de calcul** : elles sont plus élaborées et plus économiques. Cependant, elle nécessite la compréhension de notre système de désignation.

Ex : $67+28$: différentes procédures :

- ★ Algorithme : appris et mémorisé (technique opératoire de l'addition),
- ★ Outil de calcul (calculatrice),
- ★ Calcul réfléchi.

Quelques variables didactiques

 **Les collections** :  éloignement ou proximité,
 Taille.

 **Eléments des collections** :  mobilité,
 Disposition,
 Dimensions absolues et relatives.

 **Les nombres** :  domaine numérique (petit nombre, vie courante, grand nombre),
 Taille relative : écart entre nombre.

 **Mise en œuvre** :  se servir soi-même,
 Passer commande orale ou écrite...

 **Contexte** : nombre de variables, oral ou écrit, 1 2 3... élèves.

Exemples d'activités pour l'apprentissage de la suite des nombres

Le travail sur la suite orale des nombres (la comptine) et sur la suite écrite des nombres (bande numérique) commencé en maternelle se poursuit au cycle 2 pour des nombres allant jusqu'à 1 000.

Au CP, l'apprentissage des suites orales et écrites s'appuie sur les régularités que l'on peut observer à l'oral comme à l'écrit. Les élèves doivent savoir passer de l'écriture d'un nombre à celle de son suivant.

Apprentissage de la numération au cycle 2

Les objectifs d'apprentissage : Les compétences visées sont :

Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels (inférieurs à 1 000) :

- *produire des suites orales et écrites de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100 (en avant ou en arrière), à partir de n'importe quel nombre, en particulier citer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné*
- *associer les désignations orales et écrites (en chiffres) des nombres*
- *dénombrer ou réaliser une quantité en utilisant le comptage de un en un ou en utilisant des procédés de groupements et d'échanges par dizaines et centaines*
- *comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre*

Ordre des nombres entiers naturels :

- *comparer deux entiers naturels*
- *ranger des nombres en ordre croissant ou décroissant*
- *situer un nombre dans une série ordonnée de nombres*
- *écrire des encadrements d'entiers entre deux dizaines ou entre deux centaines consécutives*
- *situer des nombres (ou repérer une position par un nombre) sur une ligne graduée de 1 en 1, de 10 en 10 ou de 100 en 100*

Les matériels de numération

L'enseignement de la numération s'appuie toujours sur l'utilisation de matériels permettant de représenter les quantités et mettant en évidence les groupements de dix, de cent... qu'elles contiennent. Les matériels dessinés sur les fiches de travail doivent correspondre à des matériels réels que les élèves peuvent manipuler. L'enseignant a pour but d'apprendre progressivement aux élèves à se passer du matériels (par les représentations, puis la verbalisation) pour pouvoir à la fin penser directement avec les nombres. Il existe différentes sortes de matériels :

- des bâchettes et des élastiques
- des cubes emboîtables
- le boulier
- les boîtes de Picbille (*J'apprends les maths*, Retz-Nathan, 2001)
- les cubes, barres, plaques
- des jetons de couleur (jaunes pour les unités, rouges pour les dizaines, verts pour les centaines)
- des compteurs en carton (percé de trois fenêtres derrière lesquels se trouvent trois disques numérotés)
- un abaque (planchettes avec trois tiges où on enfle des perles)
- la monnaie, les boîtes de craies, d'oeufs, les carnets de timbres...

Les difficultés de l'enseignement de la numération

- La discordance entre la numération chiffrée et la numération verbale (orale ou écrite) : la numération chiffrée obéit à un principe positionnel alors que la numération verbale suit d'abord une logique additive jusqu'à 69 puis devient plutôt hybride
- Les difficultés spécifiques de la numération verbale : mémoriser que vingt représente deux dix (cf. chinois), assimiler les irrégularités
- Les difficultés à bien comprendre les écritures chiffrées : on peut utiliser les tableaux de numération

Exemples d'activités privilégiant le sens cardinal des nombres

Les tâches habituellement proposées sont essentiellement de quatre types :

	Variables	Procédures
dénombrement d'une collection	- le cardinal de cette collection - la collection est manipulable ou non - la collection est prégroupée en paquets ou non - dans le cas où la collection est prégroupée, ces paquets ont tous le même cardinal ou non	- perception visuelle - comptage de 1 en 1, de 2 en 2 - comptage de 5 en 5 - comptage de 10 en 10 - écriture directe du nombre après dénombrement des dizaines (et éventuellement des centaines) - utilisation de l'addition après dénombrement de sous-collections utilisation de la multiplication
Constitution d'une collection de cardinal donné	- le nombre donné - le type de collection que l'élève doit constituer : matérielle ou dessinée - le type de matériel mis à la disposition des élèves : quelconque ou présentant une structure particulière - utilisation de configurations standard (points, doigts...)	- comptage de 1 en 1 - constitution de groupement par dix et comptage de 10 en 10 - utilisation de la décomposition du nombre en dizaines et unités, éventuellement en centaines, dizaines et unités
comparaison de deux collections	- le cardinal de chaque collection - les deux collections sont manipulables, une seule, aucune - les collections sont proches ou éloignées - les collections sont prégroupées en paquets ou non - dans le cas où elles sont toutes les deux prégroupées, les groupements apparents sont les mêmes dans les deux collections ou non	- à vue - mise en correspondance terme à terme des éléments de chaque collection - mise en correspondance paquet par paquet des éléments de chaque collection - dénombrement de chaque collection
Constitution d'une collection équipotente à une collection donnée	- le cardinal de la collection donnée - la collection donnée est manipulable ou non - la collection à constituer est proche ou non de la collection donnée - la collection donnée est présentée à l'aide d'un matériel de numération structuré par rapport à 5, à 10 ou à 100	- copie visuelle - mise en correspondance terme à terme des éléments de la collection donnée avec ceux de la collection à construire - mise en correspondance paquet à paquet des éléments de la collection donnée avec ceux de la collection à construire - dénombrement de la collection donnée puis constitution d'une collection ayant le même nombre d'éléments

Apprentissage de la numération au cycle 3

Les compétences visées

Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels

- associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres), pour des nombres jusqu'à la classe des millions
- déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de la position
- donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000, etc.
- Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une décomposition utilisant 10, 100, 1000
- produire des suites orales et écrites en 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre

Ordre sur les nombres entiers naturels

- comparer deux entiers naturels, utiliser les signes < et >
- ranger des nombres en ordre croissant ou décroissant
- situer un nombre dans une série ordonnée de nombres
- écrire des encadrements d'entiers entre deux dizaines consécutives, deux centaines consécutives, deux milliers consécutifs...
- situer précisément ou approximativement des nombres sur une droite graduée de 10 en 10, de 100 en 100...

Difficultés rencontrées

- **Numération chiffrée** : Les règles de fonctionnement au rang des millions sont les mêmes, mais il est impossible de représenter physiquement les quantités, et il est de plus en plus difficile d'utiliser un matériel de numération.

Les difficultés sont donc d'avoir une perception réaliste des ordres de grandeur, de connaître la signification de chaque chiffre utilisé dans l'écriture d'un nombre et de faire la distinction entre chiffre et nombre.

Le tableau de numération est abandonné quand les élèves sont capables de se repérer en découpant l'écriture d'un nombre en tranches de trois chiffres.

- **Numération verbale** : Dans la numération avec des mots, de nouvelles difficultés apparaissent puisque, au cycle 3, le passage de l'écriture en lettres à l'écriture en chiffres (ou l'inverse) met en jeu, pour les nombres supérieurs à dix mille, une base de numération égale à mille.

L'enseignement des nombres entier à l'école primaire

	Dans les programmes	Problèmes et procédures	Langage
Maternelle	Travail sur les quantités et les nombres (suite orale jusqu'à trente)	- Nombre, mémoire des quantités, - Collections équipotentes, - Comparaison de quantités : → Procédures personnelles et expertes (dénombrement) Problèmes sur les quantités ou sur la file des nombres : → Procédures personnelles	L'expression orale des nombres (mots-nombres) est dominante
Cycle 2	Nombres intérieurs à 1000. Numération décimale (écrite et orale). Comparaison	- Dénombrer des quantités importantes - Utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position → Groupements (et échanges) itérés par 10 - Suites de nombres de 1 en 1, 10 en 10... - Graduations → Algorithme de fabrication de ces suites - Comparaison des nombres → procédure experte	L'expression écrite en chiffres des nombres est dominante. Le passage oral-chiffré doit être maîtrisé
Cycle 3	Nombres au-delà de 1000 Numération décimale (écrite et orale) Comparaison Structuration arithmétique.	Idem cycle 2, sur des nombres plus grands	Idem cycle 2, sur des nombres plus grands

Les nombres rationnels, décimaux et réels

Les fractions au cycle 3

Les compétences visées

L'introduction de l'enseignement des fractions a lieu au cycle 3, en général en classe de CM1. Les compétences à acquérir au cours du cycle 3 sont :

- *utiliser, dans les cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires, une unité étant choisie, ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée*
- *nommer les fractions en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième...*
- *encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs*
- *écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1*

Introduction à la notion de fraction au cycle 3

On peut donner plusieurs significations à une écriture fractionnaire : le partage d'une unité ou un quotient. La fraction peut être présentée de plusieurs façons : codage d'un partage d'unité, introduction de nouveaux nombres pour effectuer une mesure ou nouvelle écriture pour coder une division.

Fractions : modèles implicites ou conceptions des élèves

- Une fraction représente toujours une part d'unité. Il devient alors difficile dans ce contexte-là de comprendre ce qu'est une fraction supérieure à l'unité. La résolution exclusive d'exercice sans dépasser l'unité » va instaurer des modèles de fractions limités au codage du partage d'une unité.
- Une fraction, c'est deux nombres entiers séparés par un trait. Cette conception vide de sens se traduit par la présence d'écriture dans les productions d'élèves telles que $1/3 = 1,3$ ou $5/2 = 5,2...$
- La signification des chiffres d'une écriture à virgule en fonction du rang qu'ils occupent n'est pas assurée, avec notamment : une confusion entre des mots comme dixième et dizaine, le fait que les mots *dizaine, dixième...* désignent des rangs, des positions plus que des valeurs : le dixième, c'est le premier chiffre à droite de la virgule et non ce que l'on obtient en partageant l'unité en dix !

Ces conceptions sont mises en évidence lorsqu'il s'agit pour les élèves de placer des fractions sur des droites graduées.

Pour remédier à de telles erreurs, il faut dépasser l'unité et donc travailler sur des fractions supérieures à 1. L'introduction par les mesures de longueur est un moyen. Il est indispensable de faire placer les fractions sur une droite numérique pour étayer le statut de nombre de la fraction, cela permet de les comparer aux nombres entiers.

Les nombres décimaux au cycle 3

Au cycle 3, une toute première approche des fractions est entreprise, dans le but d'aider à la compréhension des nombres décimaux. L'étude des fractions et des nombres décimaux sera poursuivie au collège.

L'apprentissage des fractions doit évidemment avoir lieu avant celui des nombres décimaux car les contenus des programmes officiels 2002 sont très clairs : le nombre décimal doit être construit à partir des fractions décimales.

En dehors de la connaissance des fractions d'usage courant, le travail sur les fractions est essentiellement destiné à donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ou sommes de fractions décimales (fractions de dénominateurs 10, 100, 1000, etc.)

Introduction des nombres décimaux

Au cycle 3, les fractions décimales sont rapidement introduites car elles sont indispensables dans la construction des nombres décimaux. En effet les programmes insistent sur les liens qu'il faut établir entre l'écriture d'un nombre sous la forme d'une fraction décimale et l'écriture à virgule du nombre décimal.

La démarche la plus répandue est proche de la définition mathématique des nombres décimaux :

· 1ère étape : Introduction des dixièmes, des centièmes, parfois des millièmes. Les élèves sont amenés à produire, lire, utiliser des écritures du type $5/10$, $54/100$... Les supports utilisés sont les mesures de longueur, d'aires avec une unité partagée en dix, en cent..., les graduations, le papier millimétré. Les fractions avec un dénominateur égal à 10, 100 ou 1000 sont appelées fractions décimales.

· 2e étape : Etude des relations $54/100 = 5/10 + 4/100$. Les élèves apprennent à mettre une fraction décimale sous la forme d'une somme de fractions décimales. Ils doivent aussi avoir bien compris que $10/100 = 1/10$...

· 3e étape : Introduction des écritures à virgules. La méthode la plus courante consiste à dire aux élèves que les écritures décomposées vont à partir de cette étape s'écrire avec une virgule, à leur montrer la nouvelle manière d'écrire en s'appuyant sur des exemples, ce passage des écritures fractionnaires décomposées aux écritures à virgule étant présenté comme une convention. Pour cela, on se sert souvent du tableau de numération. A partir de là, on parle de nombre à virgule ou de nombres décimaux.

Nombres décimaux : modèles implicites ou conceptions des élèves

Avant l'apprentissage des nombres décimaux, les élèves ont des connaissances numériques relevant du domaine des nombres entiers mais aussi en provenance des usages sociaux des nombres décimaux.

Au niveau des nombres entiers, ils savent beaucoup de choses qui ne vont pas se généraliser au niveau des nombres décimaux :

- Tout nombre entier a un prédécesseur et un successeur
- Entre deux nombres entiers successifs, il n'y a pas de nombre entier
- Entre deux nombres entiers, il y a un nombre fini de nombres entiers
- Plus un nombre entier a de chiffres, plus il est grand

On peut faire aussi l'hypothèse que les notations de mesure avec deux unités (3€50 ; 4m 25 cm ; 3h30min) renforcent l'idée selon laquelle ces nombres ont deux parties, chacune se comportant comme un entier.

L'introduction des nombres décimaux et de leurs écritures à virgule en CM1 va perturber certaines connaissances antérieures sur les nombres entiers bien établies chez les élèves.

Pour éviter les erreurs, il faut :

- S'assurer que les écritures fractionnaires ont bien du sens pour les élèves
- Chercher à savoir comment les élèves s'y prennent pour comparer deux nombres décimaux
- Graduer des demi-droites avec des nombres écrits avec une virgule
- Revenir aux écritures fractionnaires en cas d'erreur dans la comparaison de deux nombres écrits avec une virgule
- Utiliser des carrés quadrillés non seulement pour représenter des fractions décimales, mais aussi des nombres écrits avec une virgule.
- Si l'erreur est produite dans un contexte de mesures, faire effectuer des changements d'unités
- S'entraîner à lire les nombres décimaux en faisant entendre les mots dixièmes, centièmes, etc.

Calculs avec les fractions et les nombres décimaux

Calculs avec des nombres écrits sous forme fractionnaire

Les compétences à acquérir sont :

- Utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder le résultat de mesurages de longueurs ou d'aires, une unité de mesure étant choisie explicitement
- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs
- Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1

Calculs avec des nombres décimaux écrits avec une virgule

Les compétences à acquérir (à partir du troisième trimestre de CM1) sont :

A l'écrit :

- Calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux par un calcul écrit en ligne ou en colonnes
- Calculer le produit d'un décimal par un entier par un calcul posé en colonne
- Multiplier ou diviser un décimal par 10, 100 ou 1000

Avec la calculatrice :

- Utiliser une calculatrice pour déterminer la somme ou la différence de deux nombres décimaux, le produit d'un entier par un décimal
- Utiliser une calculatrice pour déterminer le quotient entier ou décimal (exact ou approché) de deux entiers ou d'un décimal par un entier

Calcul mental ou réfléchi :

- Connaître le complément à l'entier immédiatement supérieur par un décimal ayant un chiffre après la virgule
- Organiser et effectuer des calculs du type $1,5+0,5$ ou $2,8+0,2$ ou $1,5 \times 2$ ou $0,5 \times 3$ en s'appuyant sur les résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations
- Calculer certaines sommes de deux nombres décimaux (avec un chiffre après la virgule), en particulier ajouter un entier et un décimal
- Décomposer un nombre décimal en utilisant l'entier immédiatement inférieur
- Connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux (par exemple le double de 2,5 ; 3,5 ; 7,5, etc.)
- Evaluer l'ordre de grandeur d'une somme ou d'une différence de nombres décimaux
- Utiliser la connaissance des tables pour calculer des produits simples d'un nombre décimal par un nombre entier

Calcul posé des nombres décimaux

C'est essentiellement dans la présentation des calculs et dans la gestion de la virgule que les élèves vont acquérir de nouvelles compétences.

Calculs additifs et soustractifs posés

Pour ces deux types de calculs, les élèves vont apprendre que lorsqu'on pose le calcul en colonne, on doit aligner les virgules les unes sous les autres. Une fois le calcul posé, on enseigne aux élèves à calculer comme s'il n'y avait pas de virgule, puis à placer une virgule au résultat en dessous des virgules des différents termes de la somme ou de la différence.

Calculs multiplicatifs posés

Pour le calcul en colonne du produit d'un décimal par un entier, la question de la présentation ne se pose pas. On préconise cependant parfois aux élèves de toujours prendre le nombre entier comme multiplicateur. En ce qui concerne la gestion de la virgule, les élèves apprennent qu'on calcule comme s'il s'agissait du produit de deux entiers. Une fois le résultat obtenu, on place la virgule de manière à avoir une partie décimale de même longueur au résultat que dans le nombre décimal intervenant dans le calcul.

Remarques

On peut observer que l'entrée dans les calculs de sommes et de différences se fait souvent en utilisant des calculs sur la monnaie. Cette approche permet aux élèves de donner une plus grande signification aux calculs qu'ils effectuent. En revanche, les difficultés liées à la présentation des calculs sont éludées puisque les prix sont en général exprimés avec des parties décimales à deux chiffres.

Des erreurs courantes dans les calculs de sommes, de différences ou de produits

Le premier type d'erreur concerne la présentation des calculs lorsque les parties décimales sont de longueurs distinctes. Le placement de la virgule au résultat peut ensuite donner lieu à diverses variantes : pas de virgule, ou bien virgule placée comme dans le nombre d'en haut ou comme dans le nombre d'en bas.

Pour éviter ce type d'erreurs, on peut demander aux élèves de placer les nombres dans un tableau de numération. Une autre démarche consiste à faire compléter par des zéros la partie décimale la plus courte afin que les deux parties décimales aient même longueur. Cette méthode appelée « calibrage des parties décimales » présente l'avantage d'éviter toute erreur de présentation.

Un autre type d'erreur se rencontre dans le calcul posé de différences lorsque la partie décimale du nombre que l'on soustrait est plus longue. Le calibrage des parties décimales peut encore constituer une solution efficace pour éviter cela.

Dans les calculs additifs et soustractifs, une autre erreur classique porte sur l'ajout séparé de la partie entière et de la partie décimale considérée comme un entier, notamment dans les calculs en ligne. Ce type d'erreur rejoint la conception erronée dans laquelle le décimal est perçu comme la juxtaposition de deux entiers séparés par une virgule.

La comparaison des fractions et des nombres décimaux

La comparaison des nombres décimaux occupe en effet une place importante au cycle 3 et les élèves apprennent un algorithme de comparaison de ces nombres exprimés à l'aide d'une écriture à virgule.

Deux procédures de comparaison peuvent être enseignées. Toutes deux proposent d'abord de comparer les parties entières. Dans le cas où elles sont différentes, la conclusion est immédiate. Dans le cas où elles sont égales, deux démarches sont possibles :

- Mettre les parties décimales "au même format"
- Examiner successivement chaque chiffre situé à droite de la virgule.

Le second algorithme est préférable au premier, car il ne ramène pas la comparaison de décimaux à la comparaison d'entiers, assimilation qui est source d'erreur.

La comparaison des fractions n'est envisagée au cycle 3 que dans des cas simples : fractions de même dénominateur (ou pouvant s'y ramener facilement), fractions pouvant être situées sur une droite graduée.

Comparaison des nombres décimaux

Beaucoup d'élèves comparent les parties décimales comme s'il s'agissait d'entiers : de $19 > 9$, ils déduisent $19,19 > 19,9$. Cela se traduit par certaines règles établies par les élèves :

- Le nombre le plus grand est celui qui a le plus de chiffres après la virgule ($4,3 < 4,06 < 4,249$). Cette règle est utilisée par les élèves qui assimilent un nombre décimal à un nombre entier muni d'une virgule et par ceux qui interprètent l'écriture à virgule comme celle de deux nombres entiers séparés par une virgule.
- Le nombre le plus grand est celui qui a le moins de chiffres après la virgule. Cette règle est à l'opposé de la précédente ($4,249 < 4,06 < 4,3$). Elle est utilisée par les élèves qui ont compris que "plus on se déplace vers la droite, plus les chiffres ont une faible valeur"... Ils en déduisent que plus il y a de chiffres "à droite de la virgule", plus le nombre est petit !
- Quand un nombre a une partie décimale qui commence par zéro, ce nombre est le plus petit ($4,06 < 4,3 < 4,249$; application des règles 1 et 3).

Ces règles s'appliquent en particulier pour deux nombres ayant la même partie entière, l'élève considérant alors seulement les chiffres de la partie décimale. **Pour l'élève, un nombre décimal est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule.** Beaucoup d'élèves appliquent aux nombres décimaux des règles de comparaison valables seulement pour les nombres entiers.

Dans certains cas, lorsqu'on demande un nombre décimal compris entre 3,4 et 3,5, certains élèves considèrent qu'il n'est pas possible de répondre car "3,4 et 3,5 se suivent"

Synthèse

Ces difficultés sont révélatrices des conceptions que les élèves se sont forgées à propos des décimaux, dans le prolongement de leurs connaissances sur les naturels. Pour de nombreux élèves, un nombre décimal est pensé, à partir des écritures à virgule, comme deux naturels autonomes séparés par une virgule, voire comme un seul naturel muni d'une virgule.

Ces conceptions peuvent avoir une origine de type épistémologique dans la mesure où les élèves vont prolonger naturellement sur les nombres décimaux certaines propriétés des entiers.

Mais les difficultés rencontrées peuvent avoir une origine de type didactique et provenir de choix d'enseignement. En s'appuyant par exemple, pour introduire les nombres décimaux, sur le recodage des mesures complexes s'exprimant au moyen de plusieurs unités, certaines progressions induisent chez les élèves le prolongement sur les décimaux des propriétés des nombres entiers.

L'enseignement des nombres rationnels, décimaux et réels à l'école

	Dans les programmes	Problèmes et procédures	Langage
Cycle 2	Seuls les nombres entiers sont enseignés. Mais les élèves sont déjà confrontés à la nécessité d'utiliser plusieurs unités pour exprimer une mesure : expressions du type 2m 25cm, 4€15c...		
Cycle 3	Fractions et nombres décimaux - Comparaison, encadrement, intercalation sur les nombres décimaux, - Valeur approchée d'un nombre décimal	- Pour exprimer une mesure à l'aide d'une seule unité, - Pour repérer des points sur une demi-droite graduée, - Pour approcher certains quotients d'entiers.	- Ecritures fractionnaires et écritures décimales, - Lecture courante et lecture "signifiante".

L'étude des nombres décimaux (et des fractions) à l'école primaire a pour objectif d'aider les élèves à donner du sens aux écritures à virgule, à maîtriser l'ordre et quelques calculs sur ces nombres. Mais l'apprentissage des fractions et des nombres décimaux n'est pas achevé au cycle des approfondissements et se poursuit au collège.

Au cycle 3, et plus particulièrement au CM1 et au CM2, l'élève doit être capable de désigner un nombre décimal par différentes écritures (écriture à virgule, écriture fractionnaire). Il acquiert progressivement une maîtrise de l'ordre sur les décimaux (comparaison, encadrement), développe une pratique du calcul exact ou approché et aborde des problèmes relevant de l'addition et de la soustraction de deux décimaux, de la multiplication d'un décimal par un entier.

Opérations

Divers types de calcul

Les documents d'application décrivent trois moyens de calcul : le calcul mental, le calcul instrumenté (c'est-à-dire à l'aide de machines), le calcul posé (techniques usuelles) l'apprentissage du calcul recouvre donc au moins ces trois aspects. D'autre part, il y est plusieurs fois question de **calcul réfléchi** par opposition au **calcul automatisé** (mental ou écrit).

Au cycle 2, les compétences visées sont :

- *connaître ou reconstruire très rapidement les résultats des tables d'addition de 1 à 9*
- *trouver rapidement le complément d'un nombre à la dizaine immédiatement supérieure*
- *connaître et utiliser les tables de multiplication par 2 et par 5*
- *savoir multiplier par 10*
- *calculer des sommes en ligne ou par addition posée en colonne*
- *organiser et traiter mentalement ou à l'aide de l'écrit des calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs, en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations*
- *savoir trouver mentalement le résultat numérique d'un problème à données simples*
- *savoir utiliser à bon escient la calculatrice*

Au cycle 3, les compétences visées sont :

- *connaître les résultats des tables d'addition de 1 à 9 et de multiplication de 2 à 9*
- *additionner ou soustraire mentalement des dizaines entières pour des nombres inférieurs à 100 ou des centaines entières pour des nombres inférieurs à 1 000*
- *multiplier ou diviser un nombre entier par 10, 100 ou 1000*
- *calculer la somme, la différence ou le produit de deux entiers par un calcul posé*
- *calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier d'au plus quatre chiffres par un entier d'au plus deux chiffres par un calcul posé*
- *organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul additif, soustractif, multiplicatif ou de division, en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des opérations et des nombres*
- *savoir utiliser à bon escient une calculatrice dans le cadre de la résolution d'un problème numérique*
- *utiliser une calculatrice pour calculer des sommes, des différences, des produits de nombres entiers ainsi que pour calculer un quotient entier ou décimal*

Par ailleurs, les textes relatifs au cycle 3 font une large place à la **résolution de problèmes**.

Calcul posé, calcul instrumenté

- Le calcul posé : Il s'agit du calcul écrit selon des techniques proches de celles que nous pouvons continuer d'utiliser en dehors de l'école.

- Le calcul instrumenté : Il s'agit du calcul à l'aide de calculatrices. La calculatrice peut être un outil de calcul dans la résolution de certains problèmes : Ainsi, les élèves doivent parfois mettre en œuvre des démarches nécessitant plusieurs essais ; pour éviter les erreurs qui parasiteraient la recherche, ils peuvent être autorisés à utiliser une calculatrice. Les calculs peuvent aussi prendre un tour un peu technique, risquant de décourager ou égarer des élèves à cause des occasions nombreuses d'erreurs ; la encore la calculatrice peut être conseillé. Elle peut servir aussi pour la vérification des calculs en fin de résolution d'un problème.

Mais elle ne doit pas être utilisée de manière systématique.

Calcul mental

Le calcul mental est ce qu'on appelle communément « calcul de tête », c'est-à-dire réalisé sans recourir à des traces écrites ni à une calculatrice. Il va de la restitution de résultats connus par cœur au calcul proprement dit de sommes, produits, différences et quotients.

Il n'y a pas opposition complète entre le calcul mental et le calcul écrit. Le calcul écrit intègre des moments de calcul mental. Toutefois, l'entraînement au calcul mental devra se faire le plus souvent sans le secours de l'écrit pour que les élèves ne cherchent pas à simuler, reproduire mentalement les techniques écrites.

Calcul réfléchi

Le calcul réfléchi s'oppose au calcul automatisé. On parle de calcul réfléchi quand on cherche à mettre au point des procédés de calcul en se servant des propriétés des nombres, des propriétés des opérations, de résultats connus, et de techniques déjà maîtrisées.

Le calcul réfléchi met en oeuvre la capacité à utiliser les propriétés des opérations. Il mobilise des compétences relatives aux nombres entiers et font appel à de nombreux résultats mémorisés.

Apprendre à calculer

Apprentissage de l'addition

1) Du comptage vers le calcul

Les premières *situations additives* sont rencontrées par les élèves à l'école maternelle. Dès la moyenne section et jusqu'en début de CP, les élèves apprennent à résoudre des problèmes additifs simples. Ils résolvent d'abord ce type de problème **par comptage**. Peu à peu, les élèves vont évoluer vers une technique plus efficace : ils **surcomptent**, c'est-à-dire qu'ils mémorisent l'une des quantités et font défiler les nombres de la file à partir d'elle au fur et à mesure qu'ils déplient les doigts. Cette démarche suppose des compétences nouvelles, notamment la capacité à démarrer la récitation de la file numérique à partir de n'importe quel nombre. L'élève qui surcompte doit donc être capable de donner le successeur immédiat d'un nombre quelconque dans la file sans avoir à réciter toute la file depuis 1.

Pour des *problèmes soustractifs*, l'enfant peut **décompter** ou **compter à rebours**. Dans ce cas, l'élève doit connaître la file numérique à rebours, au moins dans un domaine numérique précis et il doit aussi être capable d'indiquer le prédécesseur immédiat d'un nombre.

Une erreur courante lorsque les élèves surcomptent ou décomptent consiste à démarrer la récitation de la file depuis le nombre qu'ils ont mémorisé.

2) Premières écritures additives : Au niveau des écritures mathématiques, l'action « ajouter des cubes dans une boîte qui en contient déjà un nombre connu » est décrite par une égalité additive à partir des premiers mois du CP. Ainsi, les symboles + et = sont associés à des actions ou au résultat de ces actions et prennent ainsi leurs premières significations.

3) Décompositions additives des nombres inférieurs à 10 et apprentissage du répertoire additif

Toujours en début de CP, les nombres compris entre 0 et 10 sont étudiés sous l'angle de leurs différentes **décompositions additives**. Cette étude prépare d'une part à la construction de la **table d'addition**, ou répertoire additif et d'autre part à la recherche de compléments à la dizaine.

La mémorisation du répertoire additif passe par trois phases : 1) l'utilisation des tables dans les calculs,

2) l'entraînement à la reconstruction des résultats non encore connus (phase importante et s'étalant sur une grande durée), 3) l'entraînement à la restitution rapide des résultats contenus dans les tables

La mémorisation des tables d'additions n'est pas terminée chez tous les élèves en fin de cycle 2.

4) Calcul réfléchi : Dans le domaine du calcul réfléchi, les élèves peuvent être entraînés à calculer des sommes de plusieurs termes **en s'aidant des multiples de 10**. Un autre axe de travail peut porter sur l'entraînement des élèves à décomposer additivement certains termes d'une somme pour en faciliter le calcul.

5) Calcul en ligne avec décomposition en dizaines et unités

Dans une dernière étape, avant de présenter l'addition en colonne, les élèves apprennent à **ajouter des nombres en ligne**, en décomposant ceux-ci en dizaines et unités, puis en ajoutant séparément les dizaines et les unités avant de reconstituer le résultat. $[23 + 45 = (20 + 3) + (40 + 5) = (20 + 40) + (3 + 5) = 60 + 8 = 68]$

Pour matérialiser cette façon de calculer, on a souvent recours à des **arbres de calcul**.

6) Calcul posé en colonne

A partir de l'étape précédente, on peut introduire la présentation des calculs en colonne comme une **réorganisation des calculs en ligne**. Cette nouvelle présentation des calculs est plus économique sur le plan des écritures mathématiques, elle est plus « compacte » mais elle est plus délicate à faire fonctionner lorsque le calcul comporte des **retenues**. Les élèves apprennent à dérouler l'algorithme, c'est-à-dire la suite des calculs selon un récitatif. Au niveau de la chronologie des apprentissages, l'étude de la technique opératoire en colonne peut être limitée aux situations **sans retenue en CP** et étendue aux situations **à retenue en CE1**. L'apprentissage de la technique opératoire sera poursuivie au cycle 3, en l'étendant à des nombres de plus en plus grands et, également, en proposant aux élèves des sommes de plus de deux termes.

Apprentissage du calcul multiplicatif

L'apprentissage du calcul multiplicatif débute au **CE1**, mais la technique posée en colonne n'est réellement enseignée qu'à partir du **CE2**, puis renforcée au **CM1**.

1) Premières écritures multiplicatives

Les premières situations multiplicatives proposées aux enfants consistent généralement à donner des petits problèmes à résoudre ou des activités de dénombrement de **collections rangées par paquets équipotents** ou de manière rectangulaire. Ainsi les élèves découvrent l'écriture multiplicative comme représentant le nombre d'objets d'une collection rangée en lignes et colonnes, c'est-à-dire de forme rectangulaire. Cela permet notamment d'**installer la commutativité** de l'opération puisque la collection conserve le même nombre d'éléments. Par ailleurs, le fait d'associer les écritures multiplicatives aux deux sommes itérées fournit un moyen de produire des résultats multiplicatifs avant même de commencer à mémoriser des résultats de table.

2) Apprentissage du répertoire multiplicatif

L'apprentissage du **répertoire multiplicatif** débute au CE1 avec les tables de 2 et de 5. Les résultats de ces tables sont généralement connus des élèves, ces deux files numériques ayant souvent été récitées lors des rituels mathématiques en CP et CE1. Les élèves étudient ensuite, souvent dès le CE1, la table de 4, puis celle de 3, parfois considérée comme plus difficile (mais les programmes de 2002 limitent l'apprentissage des tables de multiplication à la table de 2, de 5 et de 10 pour le CE1).

Le reste du répertoire multiplicatif (6 et au-delà) est étudié au CE2. Il faut remarquer que grâce à la commutativité, le nombre de résultats à mémoriser diminue rapidement quand on avance dans l'apprentissage des tables.

3) A propos de la lecture du signe x : Il faut faire comprendre très vite aux élèves que $5 \times 6 = 6 \times 5$

4) Du calcul en ligne à une première présentation en colonne

En même temps que les enfants mémorisent leurs premiers résultats de table, ils commencent à effectuer des **multiplications en ligne** avec un multiplicande à deux chiffres (5×24). Ces calculs sont réalisés en utilisant la décomposition du multiplicande en dizaines et unités ($24 = 20 + 4$) et la distributivité de la multiplication sur l'addition ($5 \times 24 = 5 \times 20 + 5 \times 4$)

Après ça, les élèves sont prêts, en fin de CE1, à découvrir une première présentation en colonne des calculs multiplicatifs. Cette première approche du calcul posé en colonne évite de gérer les retenues multiplicatives, il s'agit essentiellement d'une réorganisation des calculs réalisés jusque là en ligne. L'écriture des produits (à gauche) permet de garder la trace de la signification des calculs effectués à chaque étape.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 5 \times 24 \rightarrow \quad \times \quad 5 \\ \hline 120 \end{array}$$

5) Règle des zéros et passage à un multiplicateur à deux chiffres

Les situations de fin de CE1 se limitent au cas d'un multiplicateur à un seul chiffre. Le CE2 sera donc l'année où les élèves étudieront complètement la technique posée en colonne en évoluant d'une part vers des multiplicateurs à deux chiffres et en apprenant d'autre part à compacter la présentation des calculs, ce qui suppose de gérer mentalement les **retenues**.

En préalable à ces évolutions, les élèves apprennent la « **règle des zéros** ». Celle-ci indique que lorsqu'on multiplie un nombre par 10, il suffit de « mettre un zéro » à droite de ce nombre, pour 100 on met deux zéros, etc.

La règle des zéros et son extension aux multiples de 10, 100 ou 1000 vont trouver leur intérêt lorsque le multiplicateur devient un nombre à deux chiffres ou plus. En effet, quand on voudra par exemple calculer 37×25 , on décomposera 25 en $20 + 5$ et le produit 37×20 sera traité comme $37 \times 2 \times 10$. Des calculs de ce type pourront être menés en ligne avant d'être réorganisés en colonne.

$$\begin{array}{r} 37 \\ 5 \times 37 \rightarrow \quad \times \quad 5 \\ \hline 185 \end{array}$$

Enfin, dans une dernière étape, les élèves devront compacter les lignes du calcul et apprendre à traiter les retenues issues des multiplications. Cette transition est facilitée par l'écriture des retenues en marge du calcul multiplicatif.

Apprentissage du calcul soustractif

1) Considérations préalables : Il y a **deux démarches** principales pour calculer la différence entre deux nombres. La première consiste à retirer le plus petit nombre au plus grand. La deuxième consiste à chercher ce qu'il faut ajouter au plus petit pour atteindre le plus grand. La première consiste à reculer sur la droite numérique de la valeur du petit nombre. La seconde méthode consiste à avancer du petit nombre jusqu'au plus grand.

2) Premières écritures soustractives : Les écritures $a + b$ et $a - b$ doivent être dès le départ, **travaillées simultanément** pour éviter que l'écriture $a + b$ ne soit utilisée de façon automatique car étant la seule disponible.

3) Calcul réfléchi de différences

Ce travail va occuper tout le cycle 2 et le début du CE2. Le but du travail est de faire le lien avec les **résultats mémorisés** de la table d'addition. Cela suppose que les tables d'addition soient bien travaillées. Mais avant d'y parvenir, les élèves utilisent des procédés soit basés sur des représentations dessinées des nombres, soit sur le comptage en avançant ou en reculant.

Ensuite, comme parfois les nombres ou les écarts à calculer peuvent être grands, les méthodes basées sur les dessins peuvent devenir laborieuses ou hasardeuses, cela peut pousser les élèves à leur abandon. Les divers autres procédés peuvent être :

- Le comptage à rebours assisté des doigts
- Les références à la table d'addition
- La méthode par retraits successifs
- Le comptage à rebours de 10 en 10
- Un travail séparé sur le chiffre des dizaines et celui des unités
- Une recherche du complément à $n0$ en prenant appui sur les multiples de 10
- Le comptage en avançant

Le choix de tel ou tel procédé dépend de plusieurs paramètres : la taille relative des nombres, du contexte dans lequel cette différence est produite, des connaissances des élèves, etc. L'enseignement de ces divers procédés se fait par le biais de **problèmes** et grâce au matériel de numération qui permet de les expliquer.

4) Les techniques posées en colonne

L'addition à trou : C'est une première manière de calculer une différence en colonne qui prolonge assez naturellement les méthodes de calcul réfléchi basées sur la **recherche du complément**. Dans cette technique, les élèves remplacent la soustraction qui leur est proposée par une addition dont on connaît l'un des termes et le résultat. Ensuite les élèves s'entraînent à développer ce raisonnement sans écrire l'addition à trou, mais en visualisant et en écrivant directement sous la barre le résultat des chiffres obtenus.

Dans cette technique de calcul, on voit seulement apparaître une retenue sur le nombre que l'on retire : cette technique est donc parfois appelée « **technique de la retenue en bas** ».

Cette technique qui a longtemps été très répandue fait l'objet de critiques sur le plan didactique. On lui reproche de trop relier addition et soustraction et de ne pas donner à cette opération son véritable statut.

La technique classique posée en colonne : La technique classique repose sur l'idée de **retirer le nombre le plus petit au plus grand**. Dans ce but, les élèves vont apprendre à retirer, rang après rang, le chiffre d'en bas au chiffre d'en haut. Lorsqu'à un rang donné le chiffre d'en haut est inférieur à celui d'en bas, on ajoute dix unités du rang considéré au chiffre d'en haut et une unité au chiffre du rang suivant en bas. Cette technique repose sur la **propriété des différences égales** puisqu'on ajoute le même nombre 10 aux deux termes de la différence, ce qui ne modifie pas le résultat.

On doit observer que la compréhension de la technique classique est souvent problématique car la propriété des différences égales reste souvent abstraite. Si cette technique classique fait l'objet d'un apprentissage approfondi en CE2, elle est largement reprise au premier trimestre de CM1 car il est indispensable de la maîtriser correctement avant d'aborder la technique opératoire de la division.

La technique anglo-saxonne : Dans ces pays on enseigne une technique qui s'appuie fortement sur des notions relatives à la numération pour traiter les situations à retenue. Le calcul est posé en colonne de la même manière. En revanche, lorsqu'il s'agit de retirer 8 unités à 5 unités, les élèves constatent que cela est impossible. On va alors prélever une dizaine au rang des dizaines du grand nombre et transformer cette dizaine en 10 unités, qui viennent s'ajouter au 5 unités disponibles, on peut alors retirer les 8 unités.

Cette technique utilise donc le principe d'**échange** d'une dizaine contre dix unités pour traiter les retenues. Cette technique est souvent considérée comme plus simple à comprendre et à assimiler pour les élèves.

Apprentissage de la division : Pour résoudre les problèmes de division, type de procédures possibles

☞ **Procédures imagées :**

- Dessins figuratifs
- Dessins schématisés

La procédure devient peu économique et difficile si les nombres deviennent grands. Il peut s'agir de procédure d'entrée dans le problème : **COMPREHENSION**.

☞ **Procédures progressives fondées sur l'addition ou la soustraction :**

- Addition « pas à pas »
 $12+12=24+12=36+12=48...$
 Ou
 $12+12+12+12+12=60$
 $12+12+12+12+12=60$
 $60+60=120...$
 - Soustraction « pas à pas »
 $273-12=261$
 $261-12=249$
 $249-12=237...$
 - Addition ou soustraction de multiples du diviseur

48	273
+48	- 48
96	225
+48	- 48
144	177
- Suite d'égalités incorrectes du point de vue mathématiques. Simulation des remplissages des boîtes une à une.
- Bilans partiels du nombre d'œufs utilisés.
- Cette procédure est vite coûteuse avec des nombres assez grands. Risque de **SURCHARGE COGNITIVE**
- Amélioration des procédures précédentes. Cette procédure devient plus efficace lorsque l'élève a l'idée d'utiliser des multiples de 10 (et plus tard de 100) ce qui allège la charge de calcul.

Toutes ces procédures peuvent conduire à la réussite, à condition que les nombres ne soient pas trop grands. Très souvent, la solution d'un élève utilise simultanément plusieurs de ces procédures.

☞ **Procédures multiplicatives** (résolution d'équations de type $ax+b$) :

- Pose effective de la multiplication à trou

12
×...
273
 - Essais de multiples successifs du diviseur
 $12 \times 10 = 120$ $12 \times 11 = 132$
 $12 \times 12 = 144$ $12 \times 13 = 156$
 - Essais par approches successives

12	12	12	...
× 30	× 25	× 45	
360	300	180	
- Procédure délicate lorsque le reste n'est pas nul mais elle peut être une procédure d'entrée vers les suivantes.
- Procédure fastidieuse si l'élève commence son exploration « trop bas » : elle est souvent abandonnée au profit de la suivante.
- L'efficacité dépend de l'approximation de départ et des ajustements successifs en fonction de l'écart de résultat obtenu avec le nombre cible (dividende). Cette procédure conduit souvent à la réussite.

☞ **Procédures mixtes** (utilisation de la multiplication et de la soustraction) :

- Quotients partiels au hasard

12	273	12	93
× 15	- 180	× 7	- 84
180	93	84	9
 - Utilisation de multiples de 10, 100, ...

12	273	12	93
× 20	- 240	× 2	- 24
240	33	24	9
- Ces types de procédures peuvent déboucher sur une présentation traditionnelle « en potence » :

$$\begin{array}{r} 273 \overline{) 12} \\ -240 \overline{) 20} \\ 33 \overline{) 2} \\ -24 \overline{) 9} \end{array}$$

L'élève fait un essai de multiple (inférieur au dividende), calcule l'écart entre ce produit et le dividende, puis recommence avec l'écart. Il obtient une suite de quotients partiels qu'il doit ensuite additionner.

☞ **Utilisation de la division :**

Calcul de la division de $273/12$ ou utilisation d'une calculatrice : L'élève reconnaît le modèle expert dont relève le problème proposé. La technique classique de la division va alors apparaître comme une version plus compacte des calculs précédents. Les enfants apprennent généralement à rechercher le nombre de chiffres du quotient avant de démarrer leur division. Cette étape supplémentaire n'est pas indispensable au calcul du quotient et du reste mais elle a pour but d'éviter certaines erreurs fréquemment commises par les élèves. A la sortie de l'école primaire, il est fréquent que les élèves laissent les soustractions apparentes dans le calcul de la division alors que dans la technique classique elles sont en principe effectuées mentalement.

Les erreurs de calcul

Des erreurs dans la présentation des calculs

Ce type d'erreurs concerne essentiellement l'addition et la soustraction. Il s'agit d'un **alignement erroné** des chiffres lorsque le calcul est posé en colonne et que les nombres utilisés n'ont pas la même longueur. Dans cette présentation, l'élève ne donne pas leur signification exacte aux chiffres qui composent les nombres. Cela prouve que pour ces élèves, le nombre est constitué d'une succession de chiffres que l'on peut ajouter aux chiffres d'un autre nombre sans que ces chiffres prennent une valeur différente selon leur position dans l'écriture des nombres. Les alignements incorrects des chiffres dans les calculs additifs et soustractifs proviennent aussi souvent d'une certaine maladresse des élèves dans l'écriture des nombres. Les élèves écrivent parfois des chiffres de tailles différentes et donc des décalages apparaissent.

Des erreurs dans la chronologie des calculs

Ce deuxième type d'erreur (calculer de gauche à droite) peut concerner les quatre opérations mais il est plus particulièrement fréquent pour l'addition et la soustraction, lorsque les deux termes de l'opération ont le même nombre de chiffres. Ainsi certains élèves mettent en œuvre une **chronologie erronée** qui consiste à calculer de gauche à droite, comme on lit. Cela pose des problèmes dans la gestion des retenues. On peut noter que la division est la seule opération dans laquelle on calcule de gauche à droite.

Des erreurs dans les résultats mémorisés

La production de résultats exacts à l'aide des techniques opératoires repose pour partie sur la mémorisation de répertoires (table) en particulier additif et multiplicatif. De nombreuses erreurs observées chez les élèves sont liées à une maîtrise insuffisante de ces répertoires. Les résultats peuvent être mal mémorisés ou non mémorisés, ce qui nécessite un travail de reconstruction. Ces erreurs sont très personnelles.

Des erreurs dans la gestion des retenues

La gestion des retenues dans les additions, les soustractions et les multiplications est une des sources essentielles d'erreur chez les élèves.

1) Les retenues d'addition

- Les retenues sont tout simplement **oubliées** ; l'élève reporte à chaque fois le chiffre de droite de son résultat partiel
- La retenue est écrite mais l'élève n'en tient pas compte
- A l'inverse, l'élève note systématiquement des retenues (réelles ou pas) et les intègre ds ses calculs
- Certains élèves font une **confusion relative au chiffre qu'ils doivent retenir**, ils notent le chiffre des dizaines au résultat et gardent en retenue celui des unités
- Dans les sommes de plus de deux termes, quand les retenues dépassent 1 (continuent à noter une retenue égale à 1)

2) Les retenues de soustraction

- L'**oubli** de la retenue au rang qui suit celui sur lequel l'élève travaille
- Reporter la retenue au **rang des dizaines** comme on le fait pour une addition
- Retirer à chaque rang le chiffre le plus grand, ce qui évite la gestion des retenues, les erreurs sont plus fréquentes quand le nombre du haut s'écrit avec un zéro

3) Les retenues de multiplication

La gestion des retenues dans la multiplication est plus complexe car les retenues peuvent prendre toutes les valeurs entre 1 et 8 et car la retenue s'ajoute à un produit, on alterne donc multiplication et addition en cours de calcul.

- La retenue est ajoutée **avant** de calculer le produit
- La retenue est traitée **comme dans une addition**, cette situation est renforcée par la présence d'une retenue égale à 1
- L'**oubli** des retenues
- La **juxtaposition des résultats partiels** (ce qui permet de ne pas gérer les retenues)

Il est généralement demandé aux élèves de noter les retenues à l'extérieur du calcul et de les barrer lorsqu'elles ont été prises en compte (afin d'éviter des confusions quand le calcul génère plusieurs retenues).

Autres erreurs

1) Pour la multiplication

Lorsque le multiplicateur est un nombre supérieur à 10, c'est-à-dire qu'il comporte deux chiffres ou plus, les élèves doivent **gérer des décalages** lorsque l'on passe du rang des dizaines du multiplicateur, puis au rang des centaines, etc. L'oubli des décalages successifs est une erreur classique. On observe une variante de ce type d'erreur lorsque le multiplicateur comporte un zéro dans son écriture à un rang autre que celui des unités. Certains élèves oublient alors le décalage supplémentaire lié à la présence de ce zéro.

2) Pour la division

On peut repérer des erreurs spécifiques liées à la **recherche des chiffres du quotient**.

L'élève peut faire des **essais successifs** pour la recherche des chiffres du quotient mais oublier de supprimer les essais infructueux. La recherche préalable du nombre de chiffres du quotient vise à éviter ce type d'erreurs. On pourrait aussi demander à l'élève de **contrôler son résultat** en multipliant le quotient par le diviseur, puis en ajoutant le reste et en comparant le résultat au dividende.

Il arrive que des élèves se trompent soit du fait d'erreurs de calcul ou de résultats mal mémorisés, soit du fait d'une mauvaise compréhension de la technique de la division.

La **présence d'un zéro** au quotient peut aussi conduire à des erreurs.

Des pistes pour travailler sur les erreurs

Il est primordial de s'assurer auprès de l'élève qui a produit une erreur que celle-ci est **systématique** et qu'il ne s'agit pas d'une étourderie due à la fatigue ou à la distraction. Il suffit de lui proposer des calculs du même type, d'observer cet élève et de lui demander de verbaliser ce qu'il fait.

Il est important aussi que l'élève prenne conscience de son erreur **en calculant d'une autre manière** si c'est possible ou en lui faisant chercher un ordre de grandeur du résultat (au cycle 3).

Si l'erreur de calcul est produite à l'occasion d'un problème, le contexte peut parfois servir à montrer que le résultat erroné n'est pas vraisemblable. Cette remarque doit pousser à ne pas donner que des calculs décontextualisés aux élèves même quand on a en vue uniquement la maîtrise technique.

Pour la soustraction et la division, il existe des **preuves** (l'addition et la multiplication), elles peuvent être demandées systématiquement pendant un certain temps.

Les **tableaux de numération** (pour l'addition et la soustraction) peuvent aider les élèves à mieux présenter leur calcul et leur rappellent la signification de chacun des chiffres qu'ils cherchent.

En cas de difficulté prévisible en matière de **résultats mémorisés**, on pourra mettre à disposition des élèves des tables sur support papier afin de ne pas entraver complètement l'apprentissage des techniques elles-mêmes. Cependant, cette solution doit rester provisoire. La mémorisation des répertoires relève d'un travail au quotidien et des activités rituelles sont indispensables aussi bien au cycle 2 qu'au cycle 3.

Le sens des opérations

Classification des problèmes additifs

- 1ère catégorie de problèmes : les problèmes dits de « composition d'états » dans lesquels on associe deux quantités ou deux mesures pour en obtenir une troisième. Ils se caractérisent entre autres par le fait qu'ils décrivent une situation statique. Il n'y a pas de chronologie dans la situation proposée.

- 2e catégorie de problèmes : les problèmes dits de « transformation d'états » dans lesquels une quantité, une position ou une mesure subissent un changement et deviennent ainsi une autre quantité, une autre mesure ou une autre position. Ces problèmes décrivent des situations dynamiques où interviennent une chronologie.

- 3e catégorie de problèmes : les problèmes dits de « comparaison d'états » dans lesquels on compare deux quantités, deux positions ou deux mesures. Dans ce type de problèmes, on peut connaître les deux états et chercher la comparaison ou bien connaître la comparaison et un état et chercher l'autre état.

- 4e catégorie de problèmes : les problèmes dits de « composition de transformations ». Dans ce cas, les transformations s'appliquent successivement à une quantité, une mesure ou une position pour donner une transformation globale. Ces problèmes sont de nature dynamique avec présence d'une chronologie.

- 5e et 6e catégories de problèmes : les problèmes dits de « composition de comparaisons » d'une part et les problèmes dits de « composition d'une comparaison et d'une transformation » d'autre part.

A l'intérieur d'une même classe de problèmes, certains sont plus difficiles que d'autres en fonction de la nature de l'inconnue. Il faut prendre également en compte la nature positive ou négative d'une transformation ou d'une comparaison ou bien la cohérence entre certains mots ou expressions langagières avec l'opération à mettre en oeuvre.

Fonctions et Proportionnalité

Les fonctions numériques à l'école

Le mot fonction n'apparaît pas dans les programmes, cependant, une notion sous-jacente à différents contenus y figure :

Cycle 2

- Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant : doubles des nombres inférieurs à 10 [au CP], des dizaines entières inférieures à 100 et moitié de 2, 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80 [au CE1]
- Connaître et utiliser les tables de multiplication par deux et cinq, savoir multiplier par 10 [au CE1]
- Connaître les unités usuelles et les relations qui les lient : cm et m, kg et g [au CE1]

Cycle 3

- Connaître et utiliser le triple, tiers, quadruple, quart
- Déterminer les trois quarts, deux tiers, trois demis d'un nombre entier [au CM2]
- Les élèves sont confrontés à la lecture, à l'interprétation critique et à la construction de divers modes de représentation (listes, tableaux, diagrammes, graphiques)
- Les situations de construction de diagrammes ou graphiques se limitent à des cas simples ou ayant recours à l'outil informatique

Les représentations graphiques que l'on trouve dans les manuels sont variées. La distinction diagramme / graphique n'y est pas vraiment posée. Dans les séances d'introduction, elles font souvent référence à des contextes proches des élèves.

Il arrive que différents types de fonctions soient présents, mais les élèves ne se rendront pas compte de leur présence et aucun travail particulier n'est attendu sur le thème des fonctions

Quels aspects de la proportionnalité prendre en compte ?

La proportionnalité peut être examinée dans 3 cadres différents

- **Le cadre des grandeurs** : utilisation des nombres « concrets », correspondant à des quantités ou mesures. Dans le cadre des grandeurs, il est possible de donner du sens à certaines manipulations sur les nombres qui interviennent,
- **Le cadre numérique** : le nombre est manipulé de manière abstraite,
- **Le cadre graphique** : utilisation de représentations graphiques.

A l'école primaire, seul un travail dans le premier cadre est envisagé

Situations servant de support à ces procédures

- **Situations où la proportionnalité intervient par convention sociale** : souvent dans des problèmes de nature économique (ex : relation entre prix et quantité) : le prix de la viande est souvent proportionnel à la masse achetée, mais en revanche le prix à payer pour affranchir une lettre n'est pas proportionnel à la masse.

Il s'agit le plus souvent de situations de la vie courante. Les élèves peuvent ou non connaître la convention retenue qui n'est, de plus, souvent vérifiée que dans certaines limites. Pour ce type de situation, ou bien les élèves sont préalablement informés, ou bien le fait que la proportionnalité a été retenue doit être annoncé explicitement dans l'énoncé.

- **Situations où la proportionnalité permet une modélisation d'un phénomène** :
 - En physique : masse suspendue et allongement ressort, engrenage...
 - En géométrie : longueur et diamètre du cercle, côté et diagonale du carré.

Recours à l'expérimentation ou à des théorèmes.

- **Situation où la proportionnalité intervient comme outil pour définir de nombreux concepts** : La proportionnalité est alors utilisée pour produire de nouvelles notions : échelle, pourcentage, vitesse moyenne... Ces notions sont construites en supposant la proportionnalité.

Typologie des problèmes posés

- Problèmes de **4ème proportionnelle**, avec recherche de l'un des nombres manquant, dans une relation qui met en jeu deux couples de nombres.
- Problèmes de **comparaison de deux mélanges**.
- Problèmes de **double proportionnalité** : cas d'une variable proportionnelle à 2 autres variables qui peuvent être modifiées de manière indépendante.
- Problèmes de **reconnaissance de la proportionnalité**.
- Problèmes de **passage d'un cadre à un autre**.

Traitement de la proportionnalité

Progression

Les premiers problèmes de proportionnalité rencontrés dans la scolarité sont des problèmes de multiplication et des problèmes de division. Proposés avant tout travail sur ces opérations dès le CE1, ils sont résolus, comme l'indiquent les programmes, à l'aide de procédures personnelles. Bien qu'il s'agisse de problèmes de proportionnalité, ce mot n'est pas utilisé à ce niveau.

La mise en place de la multiplication au CE1 offre la possibilité de recourir à une procédure experte pour l'expression du résultat (à l'aide d'une multiplication) et seulement dans une moindre mesure pour son calcul puisque la technique opératoire de la multiplication est longue à acquérir.

Le travail dans le champ multiplicatif avec la constitution des répertoires multiplicatifs et de tables de multiplications donne l'occasion de rencontrer des listes de nombres proportionnels et un travail est conduit sur la notion de multiple.

L'introduction d'un langage spécifique de la proportionnalité n'a sa place qu'après résolution de nombreux problèmes de proportionnalité qui ont pour but de conduire les élèves à la réflexion sur les méthodes pertinentes. Cette introduction ne peut se faire qu'à la condition d'avoir reconnu l'identité de la structure sous-jacente de ces problèmes. Le mot proportionnalité peut alors être introduit par l'enseignant, il sert alors à étiqueter cette catégorie de problèmes. Ceci n'a de sens qu'à la condition d'avoir rencontré des problèmes de non proportionnalité et d'être capable de les différencier.

Au CM1, on attend toujours des élèves qu'ils sachent « résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant des raisonnements personnels appropriés ». A ce niveau, la division n'est en général pas suffisamment maîtrisée pour que les élèves l'utilisent. Il en est de même des décimaux.

Les langages utilisés jusqu'à présent étaient limités à la schématisation figurative et au langage arithmétique. Pendant quelques années, le tableau de nombre a été le langage privilégié et quasi exclusif de la proportionnalité. C'est un excellent langage pour au moins deux raisons : il permet de consigner de façon simple, raisonné et l'exploitation facile des séries de nombres fonctions l'une de l'autre et il est possible d'y faire des opérations simples. Toutefois, les programmes précisent : « l'utilisation de tableaux de nombres permet d'organiser des informations dans de nombreuses situations. Ces outils ne doivent pas être associés systématiquement à la proportionnalité ».

Le deuxième point au programme du CM1 est d'apprendre à « situer précisément ou approximativement des nombres sur une droite graduée de 10 en 10, de 100 en 100... ». Ces catégories de problèmes sont résolues à l'aide de procédures personnelles.

Au CM2, c'est la classe où le travail sur les « problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité » se structure tout en laissant une grande place aux procédures personnelles. La deuxième nouveauté est le travail sur les agrandissement et les réductions de figure : réalisation dans des cas simples et contrôle. La construction de diagrammes et graphiques reste au stade de l'approche à l'école.

Les procédures de résolution à l'école

Il existe de nombreuses procédures de résolution de problème de proportionnalité :

- **Utilisation des propriétés de linéarité** : Ex : 6 m coûtent 21 F donc 3 m coûtent 10,50F (la moitié du prix) et 9 m coûtent 31,50 F (le prix de 6m + le prix de 3m).
- **Passage par l'unité.**
- **Utilisation d'un rapport scalaire** : passer directement de 6 à 9 par un rapport scalaire (ici en multipliant 6 par $\frac{3}{2}$).
- **Utilisation des rapports égaux.**
- **Procédure dite par les produits en croix.**
- **Utilisation du coefficient de proportionnalité.**
- **Utilisation d'un graphique.**

Deux types de procédures peuvent être mises en œuvre par les élèves de l'école primaire :

- Celles qui s'appuient sur les **propriétés additives et multiplicatives de la linéarité** (avec cas particulier du passage à l'unité),
- Celles qui s'appuient sur la mise en évidence et l'utilisation du **coefficient de proportionnalité**,

Le recours à ces diverses procédures dépend des valeurs choisies pour les variables de la situation évoquée, notamment les variables numériques.

Les principales variables didactiques

- **Relations entre les nombres donnés** :
 - Le coefficient de proportionnalité entre les grandeurs en jeu peut ou non être choisi pour favoriser le recours aux procédures qui s'appuient sur son identification : entier décimal (simple ou non), fractionnaire.
 - Les rapports de linéarité, entre nombres relevant d'une même grandeur.
- **Types de nombres** : favoriser ou non le calcul mental,
- **Nombre de couples donnés**, faciliter la mise en évidence du coefficient de proportionnalité
- **Le type de situation** qui, en particulier, permet ou non une validation par le milieu.
- **La familiarité des élèves** avec la situation évoquée : une situation familière aux élèves favorise la mise en œuvre de raisonnements adaptés et le contrôle des résultats obtenus

Les lieux de difficultés rencontrées par les élèves

- **Il peut y avoir des difficultés à identifier les grandeurs en relation dans les situations proposées.** Il est nécessaire que cette tâche soit le plus souvent assumée par les élèves, et donc que la situation ne soit pas déjà schématisée sous forme de tableau. La réalisation du tableau ou d'une autre organisation des données est, en effet, une occasion de prendre conscience des grandeurs en relation.
- **Il peut avoir des difficultés à reconnaître si la situation relève du modèle proportionnel ou non.** Certains pensent par exemple à tort que toute situation où les données numériques sont organisées en tableau relève toujours de la proportionnalité. Cette dernière est rarement signalée explicitement dans l'énoncé et l'élève doit donc faire appel à des connaissances extérieures (expérience sociale par exemple) ou deviner l'intention du maître qui lui a proposé le problème (contrat didactique). Pour de nombreux élèves, les idées d'augmentation et de diminution sont liées aux notions d'addition et de soustraction, ce qui constitue un obstacle à la reconnaissance du modèle proportionnel.
- **La difficulté peut également provenir du fait qu'il faut choisir une procédure de résolution** parmi toutes celles qui sont possibles. Les domaines numériques dans lesquels sont choisis les nombres de l'énoncé et les relations entre ces nombres jouent un rôle déterminant dans le choix d'une procédure : ce sont des variables didactiques décisives.
- **Mise en œuvre de la procédure choisie.** L'exécution des calculs peut aussi être source de difficulté.

Géométrie

Les principales compétences demandées aux élèves

Reconnaître

Cette reconnaissance peut se faire à vue d'œil ou avec des instruments. Il peut s'agir de reconnaître une figure isolée ou une figure élémentaire dans une figure complexe.

On peut distinguer 2 types de reconnaissance :

- La reconnaissance perceptive, qui est la reconnaissance à vue d'œil,
- La reconnaissance instrumentée, qui passe par la reconnaissance des propriétés caractéristiques de la figure.

Construire

L'objet à construire n'est pas présent, on dispose seulement d'une description de l'objet. Tracer une figure non présente suppose des compétences manipulatoires, mais aussi des aptitudes à mobiliser **des images mentales anticipatrices**.

Principales variables dans les tâches de construction :

- Taille de l'espace.
- Support : papier blanc ou quadrillé.
- Instruments disponibles.
- Spécificité des objets à construire ou à représenter : taille, complexité de la figure, orientation (standard ou non), chronologie des tracés, présence ou non de sur-figure.
- Proximité de la figure à reproduire.

Reproduire

Dans le cas de la **reproduction d'une figure complexe** (association de figures élémentaires) sur du papier blanc **avec des instruments classiques**, l'élève doit :

- Repérer dans la figure des figures élémentaires,
- Repérer les relations entre ces différentes figures.
- Définir une chronologie pour l'exécution des différents tracés.
- Exécuter ces différents tracés.

Les 3 premières étapes constituent "l'analyse de la figure".

Décrire

Dans le cas de la description d'une figure pour faciliter son identification : Le type des critères utilisés sera fonction de la figure à identifier mais aussi des caractéristiques des autres figures.

Dans le cas de la description d'une figure pour la représenter ou la reproduire :

- Analyser la figure (repérer figures de base, déterminer les liens, chrono des tracés).
- Communiquer les différentes étapes de construction : l'élève doit utiliser un vocabulaire qui permette à l'interlocuteur de réussir le tracé (pas forcément langage mathématique). Le codage des points de la figure facilite alors cette description.

Variable didactique, entre autres, **la présence ou non de codage pour les points**.

Les principales difficultés des élèves et leur analyse

Difficultés liées aux connaissances spatiales

Les **connaissances spatiales** sont très étroitement liées à la structuration de l'espace par l'enfant.

- Les connaissances spatiales des élèves se forment de manière progressive : certaines connaissances ne seront pas disponibles à certains âges.
- La construction des connaissances spatio-géométriques se fait par l'intériorisation des actions du sujet, c'est-à-dire par l'aptitude à penser les actions sans les exécuter : cette intériorisation passe par des actions effectives.

Difficultés liées aux représentations des objets géométriques

- Les jeunes élèves ne disposent pas des connaissances qui leur permettent d'appréhender une droite ou une courbe (trait continu) comme un ensemble de points.
- Les élèves ont du mal à faire la distinction entre la représentation d'une droite et celle d'un segment. C'est donc la conception de la notion de "droite" qui est en cause (avec l'idée d'infini).
- Certains élèves ne reconnaissent pas des droites perpendiculaires lorsqu'elles ne sont pas tracées de manière "prototypique". 2 types d'obstacles peuvent être à l'origine de cette difficulté à distinguer l'objet géométrique :
 - Un obstacle de nature épistémologique : la conception d'une droite, d'un segment, d'un ensemble infini de points, fait intervenir des notions difficiles.
 - Un double obstacle de nature didactique, c'est-à-dire imputable au type d'enseignement et aux activités proposées aux élèves. L'enseignement de la géométrie s'appuie traditionnellement sur une pratique essentiellement ostensive. Dans cette pratique, les connaissances ne sont pas perçues par les élèves comme des outils pour résoudre des problèmes. On est proche d'une conception behavioriste de l'apprentissage.

Quelques difficultés :

- Les élèves pensent que tous les objets géométriques ainsi que leurs représentations sont des objets qui ont une réalité physique,
- Les élèves peuvent être amenés à se construire des représentations erronées de certains concepts de géométrie (penser que 2 droites perpendiculaires sont des droites verticales et horizontales...)
- L'élève n'a pas stocké de prototypes correspondant aux figures à repérer, par manque d'expérience,
- Les figures ne sont pas en positions prototypiques : l'élève ne reconnaît pas des perpendiculaires parce que les droites ne sont pas "horizontales" et "verticales", ou bien l'élève ne reconnaît pas un rectangle parce qu'il est très allongé,
- Dans le cadre de la reconnaissance de figures à isoler dans une figure complexe, l'élève a du mal à isoler les figures des autres éléments de la figure.

Difficultés liées aux tâches de construction

- Des difficultés pour anticiper les tracés, liées à la difficulté de mobiliser des images mentales,
- Des difficultés pour mobiliser les propriétés des objets à construire,
- Des difficultés psychomotrices pour utiliser correctement les instruments de géométrie,
- Des difficultés liées à une connaissance incomplète des instruments. Par exemple, pour beaucoup d'élèves, un compas sert à tracer des cercles mais pas à reporter des longueurs.

Difficultés liées aux tâches de reproduction

- **Repérage des figures élémentaires dans une figure complexe.** A l'origine de cette difficulté, on retrouve le fait que pour l'élève une figure est un objet matériel du micro-espace, c'est-à-dire un objet qu'on ne peut modifier au risque de le dénaturer ou de le détruire.
- **Identification des relations entre les figures élémentaires.**
- **Etablissement d'une chronologie des tracés.** L'établissement de cette chronologie suppose de construire mentalement au moins une partie de la figure (opération délicate).
- **Exécution des tracés géométriques.** On retrouve ici les difficultés rencontrées dans les tâches de construction.

Conseil méthodologique : quand vous avez à analyser les erreurs des élèves dans une tâche de reproduction (également de description) de figures, il est conseillé d'utiliser la grille d'analyse ci-dessus: L'élève a-t-il repéré les figures élémentaires ?

L'élève a-t-il perçu les relations entre ces figures élémentaires ?

L'élève a-t-il utilisé une chronologie correcte ?

L'élève a-t-il utilisé ses instruments avec précision ?

Difficultés liées aux descriptions de figures

- **Au niveau du vocabulaire.** L'élève ne connaît pas certains mots mathématiques, ce qui l'oblige à des paraphrases longues et imprécises. L'élève confond certains mots et utilise certains mots mathématiques avec leur sens courant ou certains mots du langage courant qui n'ont pas de sens en mathématiques (rond, trait...).
- **Au niveau de la connaissance des propriétés** qui caractérisent les figures de base des objets à décrire : si l'élève ne connaît pas ces propriétés, il ne pourra pas décrire correctement ces figures.
- **Au niveau de l'effort de décentration** qu'oblige toute description : il faut se mettre à la place de l'autre. Cette difficulté entraîne la présence d'implicite dans les descriptions.
- **Au niveau du codage des figures**, qui, au départ, ne sont pas codées : bcp d'élèves pensent qu'ils n'ont pas le droit de modifier un dessin proposé par le maître (ex : ajouter des lettres).
- **Au niveau du sens que l'élève donne à l'activité de description** qui lui est proposée.

Le savoir géométrique à l'école.

A l'école maternelle, l'élève travaille uniquement sur **des connaissances et des compétences spatiales**.

Au **cycle 2**, les objets abordés sont **le carré, le rectangle, le triangle, le cercle, l'angle droit**. Une première relation est étudiée : **l'alignement**.

Au **cycle 3**, les élèves sont amenés à argumenter et à raisonner. De nouveaux objets sont étudiés : le triangle rectangle, le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange. Le parallélisme, la perpendicularité, **les égalités de longueur et d'angle** sont de nouvelles relations introduites au cycle 3.

	CYCLE 2			CYCLE 3		
	GS	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Maîtrise de l'espace	vocabulaire spatial.....					
	repérage sur une maquette ou un plan.....					
					utilisation de cartes.....	
Solides étudiés	repérage sur quadrillage.....					
	cube, pavé droit.....					
Figures planes	patrons.....					
	triangle, carré, rectangle, cercle.....					
Instruments	triangles particuliers, losanges.....					
	gabarits.....					
	règle.....					
	compas.....					
	équerre.....					
	papier calque.....					
	papier quadrillé.....					
Transformations	symétrie axiale.....					
	agrandissement, réduction.....					
Vocabulaire	vocabulaire spatial.....					
	aligné.....					
	angle droit.....					
	cube, pavé droit.....					
	face, sommet, arête.....					
	droite, segment, milieu.....					
	perpendiculaire, parallèle.....					
	angle.....					
	symétrie, axe de symétrie.....					
	triangle rectangle, isocèle, équilatéral.....					
	côté, centre, rayon, diamètre.....					

Transformation

La symétrie axiale

Recherche d'un axe de symétrie.

Les procédures possibles

Pour vérifier que l'axe conjecturé est bien un axe de symétrie de la figure, on peut :

- Soit tracer mentalement, voire réellement dans certains cas le symétrique de la figure et repérer si le symétrique obtenu fait partie de la figure.
- Soit effectuer mentalement le pliage et vérifier que les 2 parties de la figure situées dans les demi-plans définis par la droite se superposent.

Les principales difficultés rencontrées par les élèves

- Certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrie.
- Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève suivant : « un axe de symétrie d'une figure passe par le "milieu" de cette figure », mais le mot milieu peut avoir plusieurs sens pour les élèves (milieu d'un segment, centre d'un cercle, d'une figure, droite qui partage la figure en 2 figures égales...). En somme, pour les élèves, le "milieu" est le point d'équilibre ou une ligne d'équilibre.
- Les élèves privilégient les axes verticaux ou horizontaux, dans la mesure où ils le sont souvent dans leur contexte social et scolaire.
 - Dans le cas d'une figure présentant plusieurs axes de symétrie, les élèves ne repéreront que l'axe horizontal ou l'axe vertical s'ils existent.
 - Si une figure qui admet un ou des axes de symétrie est représentée de telle sorte que ces axes ne soient ni horizontaux ni verticaux, bcp d'élèves estimeront qu'il n'y a pas d'axe.
- Dans le cas où la figure est composée de figures élémentaires facilement repérables et possédant chacun un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes avec ceux de la figure complète.

Les principales variables didactiques

Les outils dont dispose l'élève :

- *L'élève dispose de papier calque* : il peut l'utiliser pour décalquer et faire divers essais de pliage pour trouver un éventuel axe de symétrie.
- *Il dispose d'une règle et d'une équerre et ne peut pas plier la feuille* : doit faire appel à des images mentales.

Le support sur lequel est représentée la figure :

- *La figure est tracée sur papier quadrillé* : Si l'axe de symétrie correspond à une ligne du quadrillage : facilite son repérage ; le décompte des carreaux facilite la vérification. Mais si l'axe ne correspond pas à une ligne du quadrillage : la présence des lignes peut induire l'élève en erreur.
- *La figure est tracée sur papier blanc* : obligation de faire appel à des images mentales.

Les caractéristiques de la figure (dans le cas où elle est représentée sur papier blanc)

- *L'orientation de l'axe* : l'élève reconnaîtra plus facilement un axe horizontal ou vertical qu'un axe oblique.
- *Le nombre d'axes de symétrie* : si plusieurs axes de symétrie, l'élève après en avoir trouvé un peut considérer que sa tâche est terminée et donc ne pas trouver les autres.
- *La familiarité que l'élève a avec la figure*.
- *Les figures élémentaires qui constituent la figure* : Si la figure est composée de 2 éléments isolés qui sont symétriques, l'élève reconnaîtra facilement l'existence de l'axe. Si la figure peut être partagée par une droite en 2 parties superposables, l'élève risque de reconnaître un axe de symétrie alors que ce n'est pas forcément le cas. (Ex : diagonale d'un parallélogramme).

Tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe

Les procédures possibles

- Papier calque.
- Papier quadrillé. *Si l'axe coïncide avec une ligne du quadrillage* : les perpendiculaires sont déjà tracées et le report des mesures se fait par comptage des carreaux. *Si l'axe ne coïncide pas avec une ligne du quadrillage* : des obstacles peuvent apparaître.
- A main levée.

Analyse des difficultés des élèves

- **Tracé du symétrique à l'aide d'un quadrillage.** Une première erreur consiste à se tromper dans le dénombrement des carreaux lors de la construction du symétrique d'un point. Une deuxième erreur consiste à construire le symétrique d'un point correctement puis à placer l'image de la figure en la translatant. Une troisième erreur peut se produire lorsque le nombre de sommets du polygone dont il faut tracer le symétrique est important. L'élève trace le symétrique de tous les points puis il se trompe en joignant ces points.
- **Tracé du symétrique d'une figure à main levée.** L'élève doit donc mobiliser des images mentales pour pouvoir placer soit les points clés de la figure (sommets ou centres des arcs de cercle), soit la figure globale. Dans le cas où le tracé n'est pas parfaitement automatisé, l'élève peut perdre le contrôle de son image mentale (surcharge cognitive).

Les variables didactiques.

- Consignes données aux élèves : Peuvent-ils plier la feuille ?
- Matériel mis à la disposition des élèves.
- L'axe est-il vertical ? horizontal ? oblique ?
- La figure : est-elle une figure "classique" ? Composée de figures classiques ? Contient-elle des côtés horizontaux ou verticaux ?
- L'espace réservé aux élèves pour répondre : leur permet-il de mettre en oeuvre toutes les procédures auxquelles ils peuvent penser ?

Il existe une conception erronée de la symétrie très répandue chez les élèves : « le symétrique d'une figure est une figure identique située de l'autre côté de l'axe, à une même « distance » de l'axe que la figure objet. Il y a conservation de la nature de la figure, des dimensions et de la forme. »

L'agrandissement et la réduction.

Les propriétés de conservation de l'agrandissement/réduction : conservation des longueurs, des angles, de l'alignement, du parallélisme et ses conséquences, comme la conservation du milieu d'un segment ou la conservation de la perpendicularité.

A noter que dans le cas de l'agrandissement de figures connues (rectangle, carré), les élèves utilisent spontanément la conservation de la forme.

L'enseignement des transformations à l'école primaire.

Les transformations sont abordées dès le **cycle 2** et permettent :

- de percevoir un axe de symétrie d'une figure,
- de vérifier par pliage si une figure a un axe de symétrie,
- de produire le symétrique d'une figure par rapport à une ligne droite par pliage.

Au cycle 2, les élèves sont aussi entraînés à reconnaître si des figures planes sont superposables ou non.

Au **cycle 3**, le travail sur la symétrie axiale est approfondi. Les élèves doivent également utiliser à bon escient les expressions telles que "figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite" et "axe de symétrie". Les élèves doivent également savoir réaliser des cas simples des agrandissements et des réductions de figures planes. Ce travail se fait en lien avec la proportionnalité et conduit à la notion d'échelle.

Géométrie dans l'espace

Les solides

Identifier des propriétés d'un solide.

- **L'élève a le solide à sa disposition** : il suffit de « lire » directement ses propriétés (difficulté compter une seule fois).
- **L'élève voit le solide mais ne peut la manipuler, ni tourner autour** : l'élève doit imaginer ce qu'il y a derrière la face avant. Difficulté encore plus importante d'oublier des faces (ou arêtes, sommets) ou d'en compter un/une plusieurs fois.
- **L'élève dispose du nom du solide** : dans ce cas il ne peut s'agir que du cube ou du pavé droit.

Les principales **variables didactiques** dans les tâches d'identification de propriétés de solides sont :

- Le fait que l'élève dispose ou non du solide,
- La familiarité que l'élève a avec ce solide,
- Le nombre de faces, d'arêtes, de sommets de ce solide, la nature des faces du solide.

Reconnaissance de patrons

Reconnaître un dessin donné comme patron d'un solide suppose pour l'élève de s'assurer :

- Que toutes les faces du solide et elles seulement sont bien représentées, ce qui suppose de connaître leur nombre et leurs caractéristiques.
- Que les côtés des différents polygones qui représentent les faces et qui se correspondent après pliage sont de même dimension.
- Que 2 faces ne se superposent pas.

Principales variables didactiques qui interviennent dans cette tâche sont :

- La nature du solide : familiarité que l'élève a avec ce solide.
- La présence ou non du solide quand l'élève résout la tâche.
- La possibilité ou non de découper et de plier le dessin.

Origines des erreurs de reconnaissance

- L'élève ne s'assure que d'une condition (surcharge cognitive ou non-appropriation de l'intérêt des autres conditions).
- L'élève n'arrive pas à vérifier mentalement la 2ème et la 3ème condition.
- L'élève pense que le patron d'un solide a toujours la même forme, par exemple la forme d'une croix pour le pavé droit ou le cube.

Construction de patrons

Variable déterminante : avoir ou non à sa disposition l'objet dont il faut construire le patron.

- L'objet est présent : L'élève peut construire le patron en le faisant rouler sur sa feuille et en traçant l'empreinte de chaque face. Difficulté : s'assurer que toutes les faces sont dessinées et pas deux fois la même.
- L'objet est absent du regard de l'élève : 2 possibilités : Si cet objet est représenté par un tracé en perspective cavalière, l'élève devra se représenter mentalement l'objet puis étaler toujours mentalement ses faces : double difficulté. Si cet objet n'est pas représenté, il ne pourra s'agir que d'un objet familier: cube, pavé...

Enfin, beaucoup d'élèves s'imaginent qu'un solide n'a qu'un seul patron, ce qui peut créer des difficultés pour la résolution de certains exercices

Les programmes

Au **cycle 2**, les élèves doivent apprendre à distinguer, de manière perceptive le cube et le pavé droit parmi d'autres solides. Ils doivent également maîtriser le vocabulaire suivant : cube, pavé droit, face, arête, sommet. Au **cycle 3**, les élèves doivent en plus savoir construire un solide à l'aide d'éléments simples (tiges, cartons). Ils doivent également savoir reconnaître, construire ou compléter un patron de cube ou de pavé droit. La représentation d'un solide en perspective cavalière n'est pas une compétence exigible à l'école.

Grandeurs et Mesures

Enseignement des grandeurs et mesures

Les grandeurs étudiées à l'école sont : la longueur, la masse, la durée, l'aire, le volume (aspect contenance) et l'angle (première approche).

Articulation entre 3 types d'activités :

- Des activités de comparaison directe : juxtaposition, superposition...
- Des activités de comparaison indirecte : recours à un objet intermédiaire par exemple,
- Des activités de mesurage.

Au **cycle 2**, les élèves étudient la **notion de longueur** et sont sensibilisé à celles de masse et de durée.

Au **cycle 3**, les élèves travaillent sur les **aires** et une **première approche de la notion d'angle**.

	Cycle 2			Cycle 3		
	GS	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
longueurs		comparaison directe.....				
			comparaison indirecte.....			
			règle graduée.....			
				mètre souple.....		
				calcul du périmètre d'un polygone.....		
aires			cm m.....	mm.....	système métrique.....	
					comparaison.....	
					mesure.....	
						calcul de l'aire d'un rectangle
						cm ² , dm ² , m ² , km ²
contenances		transvasements.....				
			utilisation d'un récipient étalon.....			
			L.....	cl.....	système métrique.....	
angles				utilisation d'un verre doseur.....		
			angle droit (reconnaître, vérifier)			
				angle droit (tracer)		
					comparer des angles.....	
masses					reproduire des angles.....	
			comparaison.....			
				pesées.....		
temps			kg ; g.....		système métrique.....	
		connaître le nom des jours, des mois.....				
		lire un calendrier.....				
				mesurer une durée.....		
				lire l'heure.....		
				j ; h ; min ; s.....		
						calculer une durée

Compétences visées

	Comparer de manière directe	Comparer de manière indirecte	Mesurer avec des unités appropriées	Connaître les relations entre les unités usuelles	Utiliser le calcul
Longueurs	- Des objets rectilignes, les tailles des élèves, des morceaux de ficelle...	- Comparer les longueurs de segments à l'aide du papier calque, d'un compas, de bandes de papier - Reporter des longueurs sur une ligne droite, à partir de la même origine - Utiliser une ficelle ou une bande de papier pour comparer les longueurs des lignes courbes	- Utiliser un étalon (gabarit d'unité) - Utiliser une règle graduée ou un mètre souple - Connaître des ordres de grandeur	- Connaître les équivalences entre les unités les plus courantes (km/m; m/cm; cm/mm) - Gérer mentalement les conversions entre unités voisines (m/dm ; dm/cm; cm/mm) - Connaître les unités légales du système métrique	- Pour trouver un périmètre, la longueur d'une ligne brisée - Pour trouver une longueur ou une épaisseur moyenne
Aires	- Par superposition	- Utiliser le papier calque - Découper les surfaces données en morceaux, les ré-assembler de manière à obtenir des surfaces dont les aires sont directement comparables	- Paver la surface à l'aide de surfaces de référence (ayant une aire d'une unité) - Utiliser du papier quadrillé - Connaître des ordres de grandeur	- Connaître les équivalences entre les unités les plus courantes (km ² /m ² ; m ² /dm ² ; dm ² /cm ² ; cm ² /mm ²) - Les conversions systématiques avec toutes les unités d'aires relèvent plutôt du collègue	- Pour trouver l'aire d'un rectangle (un de ses côtés est de dimension entière)
Contenances	- Par transvasement du contenu d'un récipient dans chacun des autres	- Verser le contenu de chaque récipient dans un récipient de référence, noter le niveau atteint pour chaque récipient vidé	- Utiliser un étalon (récipient unité) - Utiliser un verre doseur gradué - Connaître des ordres de grandeur	- Connaître les équivalences entre les unités les plus courantes (L/cL/mL) - Connaître les multiples et sous-multiples du litre	- Mélange de liquides, nombre de verres dans une bouteille
Angles	- Par superposition des secteurs angulaires	- Utilisation de papier calque - Utilisation d'un gabarit - Utilisation d'un faux compas	- Utilisation d'un étalon (gabarit d'angle pris comme unité) - Rapporteur : collègue		
Masses	- balance de Roberval	- Reasonner par transitivité	- Balance de Roberval avec des masses marquées - Utiliser une balance à lecture directe (affichage digital ou non) - Connaître des ordres de grandeur	- Connaître les équivalences entre les unités les plus courantes (kg/g ; kg/t) - Connaître les règles légales du système métrique	- Utilisation à bon escient de l'une ou de l'autre des quatre opérations pour calculer la masse d'un objet - En particulier masse d'un contenu par différence (notion de tare)
Temps	- Ds le cas où 2 événements ont débuté en mm tps, dire lequel a duré le plus longtps - Faire de même dans le cas où les deux événements n'ont pas commencé en même temps, mais se sont achevé en même temps	- Reasonner par transitivité	- Utilisation d'un instrument (horloge, réveil, montre, chronomètre) à aiguilles ou à affichage digital - Lire l'heure - Connaître les ordres de grandeur	- Connaître les noms de jours, des mois - Connaître les équivalences entre les unités (j/h ; h/min ; min/s)	- Calcul d'une durée par différence

Longueur et périmètre

Principales compétences et difficultés

Compétences	Difficultés ou erreurs
L'élève doit savoir comparer des objets par rapport à leur longueur : ☞ en les superposant, ☞ en utilisant un objet intermédiaire, ☞ transformations licites, ☞ en utilisant une unité de grandeur.	♦ Certains élèves sont « non conservant » : ils ne repèrent pas une transformation licite. ♦ Difficultés de manipulation.
L'élève doit savoir mesurer un segment avec un double dm.	♦ erreur de positionnement ou erreur de lecture des mm.
L'élève doit savoir calculer le périmètre de figures : ☞ à partir de mesure, ☞ en utilisant une ficelle ou un quadrillage.	♦ Représentation du périmètre : résultat d'un calcul obtenu par une formule, ♦ Les élèves pensent que pour calculer un périmètre, il faut ajouter toutes les dimensions qui lui sont données. ♦ Quadrillage : l'élève compte les carreaux intérieurs ou extérieurs, ♦ Réunion de 2 figures dont on connaît le périmètre : ajout des périmètres de chacune des 2 figures, ♦ Comparaison de périmètre : l'élève compare des aires et se sert d'un théorème en acte : « plus l'aire de la figure est grande, plus son périmètre est grand ». ♦ Pour l'élève, 2 figures non superposables ne peuvent avoir le même périmètre.
L'élève doit savoir estimer la longueur d'un objet.	♦ Par manque d'expériences sociales ou scolaires, l'élève n'a aucune idée de mesure de certaines longueurs : terrain de foot, sa chambre...
L'élève doit savoir effectuer des conversions d'unités	♦ Erreurs liées à l'écriture décimale des nombres ou à une méconnaissance des relations entre différentes unités.
L'élève doit savoir résoudre des problèmes faisant intervenir le périmètre.	♦ L'élève ne sait pas si la grandeur intervenant est l'aire ou le périmètre,

Conservation des longueurs

Avant 7 ans, l'enfant n'est pas conservant des longueurs.

Variables didactiques

Pour les activités de comparaison de longueurs

- La nature des objets dont il faut comparer les longueurs
- La taille de ces objets.
- Ces objets sont-ils déplaçables ou non ? Transformables ou non ?
- Le matériel dont dispose l'élève : règle graduée ou non, compas, ficelle.

Pour les activités de recherche de périmètre

- La nature de la figure : figure pour laquelle une formule peut être appliquée directement ou figure complexe.
- La taille de la figure.
- Le fait que l'élève puisse mesurer ou non certaines dimensions.
- Le matériel dont dispose l'élève : ficelle, règle graduée...
- Le fait que les dimensions inutiles figurent ou non sur le dessin.
- Le fait que certaines diagonales de la figure soient tracées.
- Le fait que la figure soit tracée sur du papier quadrillé ou non.

Aires de figures planes

Principales compétences et difficultés

Compétences	Difficultés ou erreurs
L'élève doit savoir comparer des aires : ☞ soit directement par superposition, ☞ par découpage et recollement, ☞ en utilisant une unité de mesure.	♦ Certains élèves sont « non conservant », ♦ Théorème en acte : plus le périmètre est grand, plus l'aire est grande », ♦ L'élève pense que le carré est une unité acceptable, ♦ Impossibilité de mesurer l'aire d'un triangle avec une unité carré, ♦ Des figures non superposables directement n'ont pas même aire, ♦ L'élève assimile l'aire à l'encombrement, ♦ Difficultés de manipulation, ♦ L'élève est tenté de fermer des figures concaves pour comparer leur aire.
L'élève doit savoir déterminer l'aire d'une figure à partir de ses dimensions : ☞ en appliquant une formule, ☞ en décomposant la figure en figures simples, ☞ en procédant par soustractions.	♦ Formule erronée, ♦ Difficulté d'analyse de la figure, ♦ Difficulté pour repérer les sur-figures.
L'élève doit savoir exprimer l'aire d'une figure avec une unité convenablement choisie	♦ le calcul d'aire passe par l'utilisation d'unité de longueur. L'élève conserve souvent ces unités pour présenter son résultat.
L'élève doit effectuer des conversions	♦ l'élève utilise des techniques de conversion qu'il connaît pour les unités de longueur.
L'élève doit savoir estimer la mesure de l'aire d'une surface	♦ l'expérience sociale des élèves est insuffisante.
L'élève doit savoir résoudre des problèmes faisant référence au calcul de mesure d'aire	♦ idem erreurs relatives au calcul du périmètre.

Variables didactiques

Pour les activités de comparaison d'aires :

- La nature des objets dont on demande de comparer les aires : objets physiques ou objets représentés.
- La taille de ces objets.
- La possibilité de superposition directe ou non de ces objets.
- La présence de quadrillage ou non dans le cas de figures.
- La possibilité ou non de décomposer un objet pour reconstituer l'autre.

Pour les activités de calcul de la mesure d'aires de figures :

- La nature de la figure : figure simple (rectangle, carré, disque) ou figure composée.
- La possibilité ou non de décomposer la figure en éléments simples.
- Le fait que les dimensions utiles sont données ou non.
- La mise à disposition ou pas d'un formulaire.

Autres grandeurs

Les volumes : A l'école primaire, il y a seulement une toute première approche de cette grandeur à travers des travaux de comparaison de volumes par transvasement de liquide. Les seules unités étudiées sont : le litre, ses multiples et ses sous multiples.

Les durées : Les principales difficultés sont liées au fait que les unités utilisées ne sont pas en base 10 mais en base 60.

Les angles : Seules la comparaison d'angles est au programme. L'usage du rapporteur est abordé au collège

Les masses : Ici encore le travail sur cette grandeur doit commencer par un travail de comparaison de masses, c'est seulement ensuite que sont introduites les unités.